درس اول : آشنایی با منطق ریاضی

کار در کلاس صفحه ۲

نتیجه‌ی استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱-هیچ عدد مرکّبی، عددی اوّل نیست.

۴ عددی مرکب است.

نتیجه: ۴ عددی اول نیست.

۲- اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آن‌گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش‌بینی شده است.

نتیجه: فردا مدارس تعطیل است.

کار در کلاس صفحه ۳

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آن‌ها را در صورت امکان تعیین کنید.

ایران کشور آسیایی است. — گزاره‌ای درست است.

در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با $\frac{1}{3}$ است. — گزاره‌ای درست است.

ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم. — گزاره نیست.

آیا ۲+۳ برابر با ۵ است؟ — گزاره نیست.

هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اوّل نوشت. — گزاره است ولی ارزش آن را نمی‌توان مشخص کرد

هر معادله درجه دوم دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. — گزاره‌ای نادرست است.

صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است. — گزاره‌ای نادرست است.

کار در کلاس صفحه ۴

ارزش‌های سه گزاره p، q و r، طبق جدول روبه‌رو $8 = 2^3$ حالت دارد. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

- به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، چند حالت دارد؟ $16 = 2^4$ حالت دارد.
- با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت، جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها چند حالت دارد؟ 2^n حالت دارد.

فعالیت صفحه ۵

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{1}{2}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. $(3x + 2y = 6)$

۱- ارزش کدام‌یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟

ارزش هیچ یک را نمی‌توان تعیین کرد.

۲- اگر به جای متغیر در جمله‌ی «a عددی فرد است» قرار دهیم $a = 3$ در این صورت، ارزش آن را تعیین کنید. اگر در آن $a = 4$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

اگر $a = 3$ باشد، ارزش این گزاره درست است و اگر $a = 4$ باشد، ارزش این گزاره نادرست است.

کار در کلاس صفحه ۵

جاهای خالی را پر کنید:

اگر در جمله‌ی «ب» قرار دهیم $\{۶، ۴، ۲\} = A$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

هر مجموعه‌ی سه عضوی بدون تکرار از بین اعداد ۱ تا ۶ را می‌توان قرار داد.

اگر در جمله‌ی «ب» قرار دهیم $\{\ \} = A$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جمله‌ی ب مجموعه A را یک مجموعه‌ای غیر از مجموعه‌ی سه عضوی قرار دهیم ارزش گزاره نادرست می‌شود.

اگر در جمله‌ی «پ» قرار دهیم ... $= x$ و ... $= y$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x =$ ... و ... $= y$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

اگر در جمله پ، x و y را به این صورت قرار دهیم ارزش گزاره حاصل درست می‌شود: $\begin{cases} x = ۰ \ , \ y = ۳ \\ y = ۰ \ , \ x = ۲ \end{cases}$ و هر زوج مرتب دیگری به غیر از $(۰،۳)$, $(۲،۰)$ قرار دهیم ارزش گزاره نادرست می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۶

دامنه‌ی متغیر گزاره نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آن‌ها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D = Z)$

$\{x = ۷k \ . \ k \in N\}$

ب) $۱۵x^۲ - ۷x - ۸ = ۰$ $(D = Z)$

با حل معادله‌ی درجه ۲ داریم:

$\begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = \dfrac{-۸}{۱۵} \end{cases}$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{۱}{۶}$. $\left(D = \{۱،۲،...،۶\}\right)$

$x = ۱،۲،۳،۴،۵،۶$

فعالیت صفحه ۶

۱-هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲- آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. از دو گزاره تشکیل شده. نادرست
- عدد ۲ زوج است، یا عدد ۵ مضرب ۳ است. از دو گزاره تشکیل شده. درست
- اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است. از دو گزاره تشکیل شده. نادرست
- چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد. از یک گزاره تشکیل شده. نادرست
- اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس. از دو گزاره تشکیل شده. نادرست

فعالیت صفحه ۸

گزاره‌ی مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است».

- آیا ارزش این گزاره‌ی مرکب درست است؟ نادرست

- فرض کنید:

p: سوگند فارغ‌التحصیل شد.

q: پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

- اگر ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ نادرست
- اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ نادرست
- هرگاه ارزش دو گزاره‌ی p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ نادرست
- هرگاه ارزش دو گزاره‌ی p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ درست

بنابراین، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره‌ی p و q درست باشند و در بقیه‌ی حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p \wedge q$ به صورت روبه‌رو است:

p	q	$p\wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس صفحه ۸

۱- جدول زیر را کامل کنید.

گزاره‌ی p	گزاره‌ی q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p\vee q$	ارزش $p\wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	د	د	د	د
۲ عددی اول نیست.	عدد ۷ مضرب ۵ نیست.	ن	د	د	ن
۲ عددی اوّل است.	عدد ۷ مضرب ۵ است.	د	ن	د	ن
۲ عددی اول نیست.	عدد ۷ مضرب ۵ است.	ن	ن	ن	ن
(۷-) اوّل است.	۲ عددی اول است.	ن	د	د	ن

۲. با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

همانطور که ملاحظه می‌کنید، همه‌ی حالت‌های ارزش دو گزاره‌ی $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان‌اند پس $\sim p\wedge\sim q\ \equiv\ (\sim p\wedge\sim q)$ در منطق ریاضی به این هم‌ارزی قانون دمورگان گفته می‌شود.

۳-با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p\wedge q) \equiv \sim p\vee\sim q$.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

کار در کلاس صفحه ۱۰

۱-با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p\vee q$ هم‌ارز منطقی‌اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p\vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

۲-گزاره‌ی «$q \Rightarrow p$» عکس ترکیب شرطی «$p \Rightarrow q$» و گزاره‌ی $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است. با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره‌ی شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

۳- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پر کردن جاهای خالی نشان دهید:

الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	د	ن	د

ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

کار در کلاس صفحه ۱۲

۱-با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره‌ی مرکب «$p \Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزاره‌ی مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۲. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی:

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$p \vee q \equiv q \vee p$

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

ب) قوانین شرکت‌پذیری:

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

p	q	r	$p\vee q$	$q\vee r$	$(p\vee q)\vee r$	$p\vee(q\vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$(p\wedge q)\wedge r \equiv p\wedge(q\wedge r)$

p	q	r	$p\wedge q$	$q\wedge r$	$(p\wedge q)\wedge r$	$p\wedge(q\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

پ) قوانین توزیع پذیری:

$p\vee(q\wedge r) \equiv (p\vee q)\wedge(p\vee r)$

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee q$	$p\vee r$	$p\vee(q\wedge r)$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

کار در کلاس صفحه ۱۴

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^۲ \geq ۰$	$\forall x \in R \,;\, x^۲ \geq ۰$
برای هر عدد زوج صحیح a داریم: $a = ۲k$	$\forall a \in E \,;\, a = ۲k \ (k \in Z)$
بعضی از اعداد اول زوج هستند.	$\exists p \in P \,;\, p = ۲k \ (k \in Z)$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستنند.	$\exists x \in o \,;\, x \in P$

کار در کلاس صفحه ۱۵

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است.

نادرست، زیرا ۲ عددی اول است و زوج است.

ب) $\exists x \in N \,;\, ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

خیر زیرا با حل معادله‌ی درجه‌ی ۲ داریم: $\begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$ که جواب‌ها عدد طبیعی نیستند.

پ) $\exists x \in Z \,;\, ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

درست، با توجه به جواب‌های معادله که عضوی از مجموعه‌ی اعداد صحیح هستند.

ت) هر عدد زوج، غیر اوّل است.

نادرست، زیرا ۲ عددی زوج است و اول است.

ث) در آمار، هر متغیّر ترتیبی یک متغیّر کیفی است.

بله، زیرا متغیرهای ترتیبی شدت و ضعف یک ویژگی را بیان می‌کنند.

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. درست

چ) در فضای نمونه‌ی S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > ۱$.

نادرست، زیرا همواره $P(A) \leq ۱$ می‌باشد.

ح) طول هر پاره‌خط، عدد حقیقی است.

نادرست، زیرا طول پاره‌خط منفی نمی‌تواند باشد.

تمرین های صفحه ۱۷

۱. از جملات زیر کدام یک گزاره است، ارزش گزاره ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است. گزاره هست- نادرست

ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. گزاره هست- درست

پ) $۶ < ۵ + ۳$ گزاره هست- درست

ت) تخته سیاه را پاک کنید. گزاره نیست

ث) $\{۱,۲,۳,۴\} \in \{۱\}$ گزاره هست- درست

ج) چه باران شدیدی می آید. گزاره نیست

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. گزاره هست- غلط

ح) $\mathbb{R} \not\subset \emptyset$ گزاره هست- غلط

خ) $\sqrt{۲} \in \mathbb{Z}$ گزاره هست- غلط

د) عدد $۸ + ۵^۹$ عددی اول است. ؟؟؟

ذ) به امید کامیابی شما. گزاره نیست

ر) آمار، مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. گزاره هست- درست

۲. در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-۷ = -۷ \times ۱$

ب) $۵ + \frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z}$

پ) $\frac{۸ \times ۱}{۴} \in \{۲, \frac{۱}{۲}\}$

ت) $۵ \times ۳ > \frac{۱۰ \times ۹}{۲}$

ث) $۰ = ۰ \times \sqrt{۲}$

ج) $۱ \in \{۱\}$

چ) $۲۰ = ۵(۷ - ۳)$

ح) $۳۵ = ۷(۸ - ۳)$

۳. دامنه ی متغیر هر یک از گزاره نماهای زیر، مجموعه ی اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است. $\{۱,۴,۹,۱۶,...\}$

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است. $\{۶,۱۱,۱۶,۲۱,...\}$

پ) $\frac{۲x+۱}{۳} \leq -۱$ $\{-۲, -۳, -۴, ...\}$

ت) $\{n(n+۱) = ۰ | n \in w\}$ $\{۰\}$

۴. نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) $۴ \leq ۳$ $۴ > ۳$

ب) ابوالوفایی بوزجانی، ریاضی دان ایرانی است. ابوالوفای بوزجانی ریاضی دان نیست.

پ) $a \in \{b,c,d\}$ $a \notin \{b,c,d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست. ۲ عددی زوج نیست یا عدد π گویا نیست.

ث) خورشید به دور زمین می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است. زمین به دور خورشید می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان نیست

ج) اگر a زوج باشد، آنگاه $a+۱$ فرد است. اگر a فرد باشد، آنگاه $a+۱$ زوج است

۵. ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲ < ۳) \wedge (۴ + ۳ = ۱۰)$ نادرست

ب) $(۵ > ۳) \vee (x^۲ + ۱ = ۰)$ درست

پ) $(\frac{۱}{۲} \neq \frac{۳}{۶}) \vee (۱ \in \{۲,۳,۴\})$ نادرست

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه ۴ مربع کامل نیست.
درست

ث) در متوازی الاضلاع مفروض دو قطر با هم برابرند.
نادرست

ج) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.
درست

چ) $-۳ < -۲ \Leftrightarrow ۳ > ۲$ درست

ح) اگر $a \in \{b\}$ آن گاه $a = b$ و برعکس. درست

۶. جدول زیر را کامل کنید.

گزاره ی p	گزاره ی q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \Rightarrow q$	ارزش $p \wedge q$
عدد ۲ زوج است.	عدد ۳ فرد است	د	د	د	د
شهریور ۳۱ روز دارد	$1 \nless 2$	د	ن	ن	ن
$2 \in \{1,2\}$	عدد ۵ مضرب ۲ است	د	ن	د	ن
$۳ > ۵$	عدد ۷ اول است.	ن	د	د	ن

۷. جدول ارزش های هر یک از گزاره های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د

ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

ب) $\sim p \wedge p$

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	د	ن

پ) $\sim p \vee p$

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	د	د

ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	ن	د	ن	ن
د	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د

ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

$p \vee q$	q	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	ن	ن
د	د	د
ن	ن	د
د	د	د

ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۸. با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید که:

الف) $p \Rightarrow p \equiv T$

p	p	$p \Rightarrow p$
د	د	د
ن	د	د
د	ن	ن
ن	ن	ن

ب) $p \vee F \equiv p$

p	f	$p \vee f$
د	د	د$\equiv p$
ن	د	د
د	ن	د$\equiv p$
ن	ن	ن$\equiv p$

پ) $p \wedge T \equiv p$

p	T	$p \wedge T$
د	د	د $\equiv p$
ن	د	ن $\equiv p$
د	ن	ن
ن	ن	ن $\equiv p$

ت) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge -q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د

ث) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (p \vee p)$
د	د	د	د
ن	د	د	ن
د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

ج) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د $\equiv p$
د	ن	ن	د $\equiv p$
ن	د	ن	ن $\equiv p$
ن	ن	ن	ن $\equiv p$

چ) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن

ح) $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	د	ن	د	ن

۹. ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

؟؟؟؟؟؟؟

۱۰. گزاره های زیر را با استفاده از نمادهای $\exists, \forall$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. $\forall x \in N: (x = ۲k) \vee (x = ۲k - ۱)$ – درست

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم : $a^۲ < ۰$. $\exists a \in W: a^۲ < ۰$ - نادرست

پ) همه ی اعداد اول فرد اند. $\forall d \in P: d = ۲k - ۱$ - نادرست

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $۱ - ۲x > ۵$ $\forall x \in Z: x \geq ۰ \Rightarrow ۱ - ۲x > ۵$ – نادرست

ت) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است. $\forall x \in R: x \neq ۰ \wedge (x + \frac{۱}{x} \geq ۲)$ – درست

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^۲ = x$ $\exists x \in R: x^۲ = x$ – درست

۱۱. هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} | ۰ < x \leq ۵\}$ دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x \in A; x + ۴ = ۱۰$ نادرست

ب) $\forall x \in A; x + ۲ \leq ۹$ درست

پ) $\exists x \in A; x + ۳ \leq ۴$ درست

ت) $\forall x \in A; x + ۱ \geq ۶$ نادرست

۱۲. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^۲-۱}{x-۱} = x + ۱$ $\exists x \in R: \frac{x^۲-۱}{x-۱} \neq x + ۱$ – نادرست

ب) $\forall n \in \mathbb{N}; (۲^{۲^n} + ۱) \in P$ $\exists n \in N: \left(۲^{۲^n} + ۱\right) \notin P$ – درست

پ) $\forall x \in (-\infty, ۰); x - \frac{۱}{x} \leq -۲$ $\exists x \in (-\infty, ۰): x - \frac{۱}{x} \geq -۲$ – نادرست

ت) $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y-۳}{۵} = ۰$ $\forall y \in R: \frac{y-۳}{۵} \neq ۰$

فصل1-درس 2:زیر مجموعه

فصل1-درس2

درس دوم : مجموعه – زیر مجموعه

کار در کلاس صفحه ۱۹

۱-فرض کنید $A = \{a \,.\, b\}$ درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\} \in A$ نادرست، زیرا در مجموعه‌ی A عضوی به این شکل $\{a\}$ نداریم و در واقع $a \in A$ است.

ب) $\emptyset \in A$ درست، زیرا تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.

پ) $\{a\} \subseteq A$ درست.

ت) $b \subseteq A$ نادرست، زیرا $b \in A$ است و $\{b\} \subseteq A$.

ث) $a \in A$ درست.

ج) $\{a \,.\, b\} \subset A$ درست، زیرا هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است.

۲-کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی‌اند؟

الف) $\{x \in Z \mid x^۲ = ۹ \,،\, ۲x = ۴\}$: تهی $\quad ۲^۲ \neq ۹ \quad ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲$

ب) $\{x \in Z \mid x + ۸ = ۸\}$: ناتهی $\quad x = ۰ \,,\, ۰ \in Z \quad x + ۸ = ۸$

پ) $\{x \in Z \mid x \neq x\}$: ناتهی، زیرا همواره $x = x$ است.

ت) $\{x \in N \mid x^۲ = ۷x\}$: ناتهی $\quad x^۲ = ۷x \Rightarrow x = ۷$

۳-مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.

$A = \{x \in Z \mid |x| \leq ۲\}$ $\quad A = \{x \in Z \mid -۲ \leq x \leq ۲\}$

$A = \{-۲ \,,\, -۱ \,,\, ۰ \,,\, ۱ \,,\, ۲\}$

$B = \{m \in Z \mid m^۲ = m\}$ $\quad B = \{۰ \,,\, ۱ \,,\, -۱\}$

$C = \{k \in R \mid k^۲ - ۱ = ۰\}$ $\quad C = \{۱ \,,\, -۱\}$

$D = \{a \in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}$ $\quad D = \{۱ \,,\, ۲ \,,\, ۳ \,,\, ۴ \,,\, ۵ \,,\, ۶\}$

۴- با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$A \cap D \subseteq C$: نادرست　　$B \subseteq A$: درست　　$B \in A$: درست

$B - D \subseteq A$: درست　　$C \nsubseteq A$: نادرست　　$B \subseteq C \cup A$: درست

فعالیت صفحه ۲۰

مجموعه $A = \{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید.

۱-همه‌ی زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

$\emptyset , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a , b\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a , b , c\}$

۲-با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B = \{b , c\}$ از مجموعه‌ی A را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم؛ چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $c \in B$ و b متناظر با آن‌ها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعه‌ی $\{a\} \subseteq A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیه‌ی زیرمجموعه‌های A را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

۱۰۰ ، ۱۰۱ ، ۱۱۰ ، ۰۱۱ ، ۰۱۰ ، ۰۰۱ ، ۰۰۰ ، ۱۱۱

۳-با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اوّل

۲ × ۲ × ۲ = ۸

۴-فرض کنید $A = \{a_1 , a_2 , a_3 , a_4\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

۱۰۰۰ ، ۰۱۰۰ ، ۰۰۱۰ ، ۰۰۰۱ ، ۱۱۰۰ ، ۱۰۱۰ ، ۱۰۰۱ ، ۰۱۱۰ ، ۰۱۰۱ ، ۰۰۱۱ ، ۱۱۱۰ ، ۱۱۰۱ ، ۱۰۱۱ ، ۰۱۱۱ ، ۱۱۱۱ ، ۰۰۰۰

رقم چهارم　　رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اوّل

۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۱۶

۵-اگر $A = \{a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n\}$ در این صورت، با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول رقم دوم رقم سوم رقم nام

$$\text{تعداد زیر مجموعه های}A = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times ... \times 2}_{n \text{ تا ۲ داریم}} = 16 \Rightarrow 2^n =$$

فعالیت صفحه ۲۱

۱-مجموعه‌ی $A = \{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های A به غیر از $\emptyset$ را بنویسید.

$\{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a , b\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a , b , c\}$

۲. از بین زیرمجموعه‌های ناتهی A که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آن‌ها برابر با A شود.

$\{a\} , \{b , c\}$; $\{b\} , \{a , c\}$; $\{c\} , \{a , b\}$

۳. همه‌ی جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به دست آورید.

$\{A\} , \{B\} , \{C\}$

۴. آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تهی باشد و اجتماع آن‌ها برابر با A شود؟ بله

کار در کلاس صفحه ۲۱

مجموعه‌ی $A = \{1 , 2 , 3 , ... , 9\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟

۱- $\{4 , 8 , 9\}$ و $\{2 , 6\}$ و $\{1 , 3 , 5\}$

۲- $\{5 , 7 , 9\}$ و $\{2 , 4 , 6 , 8\}$ و $\{1 , 3 , 5\}$

۳- $\{7 , 9\}$ و $\{2 , 4 , 6 , 8\}$ و $\{1 , 3 , 5\}$

۳، چون سه مجموعه هیچ اشتراکی با هم ندارند و اجتماع آن‌ها مجموعه‌ی A را تشکیل می‌دهد.

کار در کلاس صفحه ۲۳

۱- برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A \subseteq A\cup B$

اثبات:

$$\forall x;\ (x \in A \Rightarrow x \in A \ \vee x \in B) \Rightarrow x \in A\cup B$$

بنابراین داریم:

$$\forall x;\ (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A\cup B$$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید.

باید ثابت کنیم به ازای هر عضو از مجموعه A، آن عضو حتماً در مجموعه $A\cup B$ نیز هست.

هر عضو که در مجموعه A در نظر بگیریم: $x \in A$، قطعاً در مجموعه‌ی مرجع U هست؛ بنابراین این عضو یا در مجموعه A است یا در مجموعه B است. بنابراین $x \in A \cup B$ و می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq A\cup B$.

۲- فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $A\cup C \subseteq B\cup D$.

اثبات: جاهای خالی را پر کنید:

$$\forall x;\ [x \in (A\cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \ \Rightarrow \ x \in B & (\text{زیرا } A \subseteq B) \\ \vee & \vee \\ x \in C \ \Rightarrow \ x \in D & (\text{زیرا } C \subseteq D) \end{cases} \Rightarrow x \in B \ \vee \ x \in D \Rightarrow x \in B\cup D$$

بنابراین داریم:

$$\forall x;\ [x \in (A\cup C) \Rightarrow x \in (B\cup D)] \Rightarrow A\cup C \subseteq B\cup D$$

۳-فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آن‌گاه $(A\cup B) \subseteq C$.

راهنمایی: از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

$$\forall x;\ [x \in (A\cup B)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \ \Rightarrow \ x \in C & \text{چون } A \subseteq C \\ \vee & \\ x \in B \ \Rightarrow \ x \in C & \text{چون } B \subseteq C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x \in C \ \text{ بنابراین } \ \forall x;\ [x \in (A\cup B)] \ \Rightarrow \ x \in C \ \Rightarrow \ (A\cup B) \subseteq C$$

کار در کلاس صفحه ۲۳

فرض کنید $A = \{۱ , ۲\}$. کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

الف) $\{x \in Q |\ x^۲ - ۳x + ۲ = ۰\}$

$$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad (x-۱)(x-۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

بنابراین این مجموعه با مجموعه‌ی A مساوی است. $\{۱ , ۲\}$

ب) $\{x \in R |\ ۱ \le x \le ۲\}$

این مجموعه با مجموعه A مساوی نیست زیرا بین ۱ و ۲ بی شمار عدد حقیقی وجود دارد. $\left\{۱ , \frac{۳}{۲} , \dots , ۲\right\}$

پ) $\{x \in Q |\ ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰\}$

این مجموعه با مجموعه A مساوی نیست زیرا یک عضو مجموعه A هست ولی عضو این مجموعه نیست:

$$۲(۱^۲) + ۳(۱) + ۱ \neq ۰$$

ت) $\{x \in N |\ ۱ \le x \le ۲\}$

این مجموعه با مجموعه‌ی A مساوی است زیرا بین ۱ و ۲ هیچ عدد طبیعی وجود ندارد و بنابراین اعضای این مجموعه:

$\{۱ , ۲\}$ است که با مجموعه‌ی A مساوی می‌باشد.

تمرین صفحه ۲۴

۱. مجموعه های زیر را که شامل شکل های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید:

$A = \{x|$ یک چهار ضلعی است $x\}$ $C = \{x|$ یک لوزی است $x\}$

$B = \{x|$ یک مستطیل است $x\}$ $D = \{x|$ یک مربع است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D \subseteq C$ درست است زیرا مربع حالت خاصی از لوزی است.

ب) $B \subseteq D$ نادرست است زیرا نمی‌توان ادعا کرد که همه‌ی مستطیل‌ها مربع هستند.

پ) $A \subseteq B$ نادرست است زیرا نمی‌توان ادعا کرد که همه‌ی چهار ضلعی‌ها مستطیل هستند، مانند ذوزنقه

ت) $D \subseteq A$ درست است زیرا مربع نوعی چهار ضلعی است.

۲. فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,…,۸,۹\}$ و $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $C = \{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D = \{۳,۴,۵\}$ و $E = \{۳,۵\}$. در هریک از حالت های زیر مشخص کنید: X می تواند کدام یک از این مجموعه ها باشد:

الف) X و B عضو مشترکی ندارند. C و E

ب) $X \subset A$ ولی $X \not\subset C$ A ، B و D

پ) $X \subseteq D$ ولی $X \not\subset B$ D ، E

ت) $X \subseteq C$ ولی $X \not\subset A$ چنین مجموعه‌ای وجود ندارد.

۳. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{\emptyset\} = \emptyset$ نادرست است زیرا $\{\emptyset\}$ دارای یک عضو است ولی $\emptyset$ عضوی ندارد.

ب) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ درست است زیرا $\emptyset$ زیر مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست.

پ) $\emptyset \notin \{\emptyset\}$ نادرست است زیرا تنها عضو مجموعه $\emptyset$ است.

ت) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset\}\}$ درست است زیرا $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ دقیقا یکی از اعضاء مجموعه است.

۴. کدام یک از مجموعه های زیر باهم مساوی اند؟

$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < ۲\} = \{-۱,۰,۱\}$ $-۲ < m < ۲$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^۳ = x\} = \{-۱,+۱,۰\}$

$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^۲ \leq ۲y\} = \{۰,۱,۲\}$

$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^۲ \leq ۱\} = \{-۱,۰,۱\}$

$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^۳ + ۲m = ۳m^۲\} = \{۰,۱,۲\}$

$m^3 - 3m^2 + 2m = 0 \quad m(m^2 - 3m + 2) = 0 \quad m = 0 \quad (m-2)(m-1) = 0 \quad m = 2 \;\; m = 1$

$x^3 - x = 0 \quad x(x^2 - 1) = 0 \quad x = 0 \quad x = \pm 1 \quad -1 \le m \le 1$

$y^2 - 2y \le 0 \quad y(y-2) \le 0$

	0		2	
+	0	-	0	+

$A = B = D\,,\;\; C = E$

۵. مثال هایی از مجموعه های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم های زیر درست باشند.

الف) $A \in B$ و $B \in C$ و $A \notin C$

$A = \{1,2\} \;\; B = \{\{1,2\},1\} \;\; C = \{\{\{1,2\},1\},3\}$

ب) $A \in B$ و $B \in C$ و $A \in C$

$A = \{1\} \;\; B = \{\{1\},2\} \;\; C = \{\{\{1\},2\},\{1\},4,5\}$

پ) $A \in B$ و $A \subseteq B$

$A = \{4\} \;\; B = \{4,5,6\}$

۶. اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعه ی A چند زیر مجموعه دارد؟

$2^x - 384 = 2^{x-2} \Rightarrow 2^x - 384 = 2^x \div 2^2 \Rightarrow 2^x - 284 = 2^x \div 4$

$2^x - \frac{2^x}{4} = 384 \Rightarrow 2^x\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 384 \Rightarrow 2^x = 384 \times \frac{4}{3} = 512 = 2^9 \Rightarrow x = 9$

۷. اگر $A = \{2, x + 2y, 4\}$ و $B = \{4,5, x - y\}$ و $A = B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

$x + 2y = 5$

$x - y = 4 \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow 3x = 13 \quad x = \frac{13}{3} \quad \frac{13}{3} - y = 4 \quad \frac{13}{3} - 4 = y \quad \frac{1}{3} = y$

۸. ثابت کنید برای مجموعه های A و B با مرجع U داریم: $A - B \subseteq A$

$\forall x;\, [x \in (A - B)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A \Rightarrow A - B \subseteq A$

۹. فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آن گاه:

الف) $A \cup C \subseteq B \cup C$

$\forall x;\, [x \in A \cup C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{یا} \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ \text{یا} \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in B \cup C$

ب) $A \cap C \subseteq B \cap C$

$$\forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \text{و} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \text{و} \Rightarrow x \in C \cap B \Rightarrow \quad A \cap C \subseteq B \cap C$$

۱۰. مجموعه های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن گاه:

الف) $A \cap C \subseteq B \cap D$

$$\forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \text{و} \xRightarrow{A \subseteq B \text{ و } C \subseteq D} \begin{cases} x \in D \\ x \in B \end{cases} \text{و} \Rightarrow (A \cap C) \subseteq B \cap D$$

ب) $A \cap C \subseteq B \cup D$

$$\forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \xRightarrow{A \subseteq B \text{ و } C \subseteq D} \begin{cases} x \in B \\ x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \cap D \xRightarrow{B \cap D \subseteq B \cup D} B \cap D \subseteq B \cup D$$

۱۱. الف) فرض کنید: $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید: $A = \emptyset$.

چون تهی زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است بنابراین $\emptyset \subseteq A$ و از طرفی طبق فرض $A \subseteq \emptyset$ در نتیجه $A = \emptyset$

ب) فرض کنید: $U \subseteq A$ ثابت کنید: $A = U$.

چون هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی مرجع است بنابراین $A \subseteq U$ و طبق فرض $U \subseteq A$ در نتیجه $A = U$

۱۲. هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید:

الف) $B - A = B$

$\forall x;\ x \in B - A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B \Rightarrow B - A \subseteq B$ (۱)

$\forall x;\ x \in B \xRightarrow{A \cap B = \emptyset} x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow B \subseteq B - A$ (۲)

از (۱) و (۲) داریم:

$B - A = B$

ب) $A - B = A$

$\forall x;\ x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \Rightarrow A - B \subseteq A$ (۱)

$\forall x;\ x \in A \xRightarrow{A \cap B = \emptyset} x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A \subseteq A - B$ (۲)

از (۱) و (۲) داریم:

$A - B = A$

۱۳. فرض کنید: $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$، کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای X محسوب می شود.

الف) $\{d, g\}$ و $\{b\}$ و $\{a, c, e\}$ افراز نیست زیرا اجتماع مجموعه‌ها برابر با X نیست.

ب) $\{b, e, f\}$ و $\{c, d\}$ و $\{a, e, g\}$ افراز نیست زیرا مجموعه اول و آخر با هم اشتراک دارند.

پ) $\{d, f\}$ و $\{c\}$ و $\{a, b, e, g\}$ افراز است.

ت) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ افراز نیست زیرا افراز تنها از یک مجموعه تشکیل نمی‌شود.

ث) $\{e\}$ و $\{f, g\}$ و $\{d\}$ و $\{b, c\}$ و $\{a\}$ افراز است.

فصل1-درس3-قوانین اعمال مجموعه ها(جبر مجموعه ها)

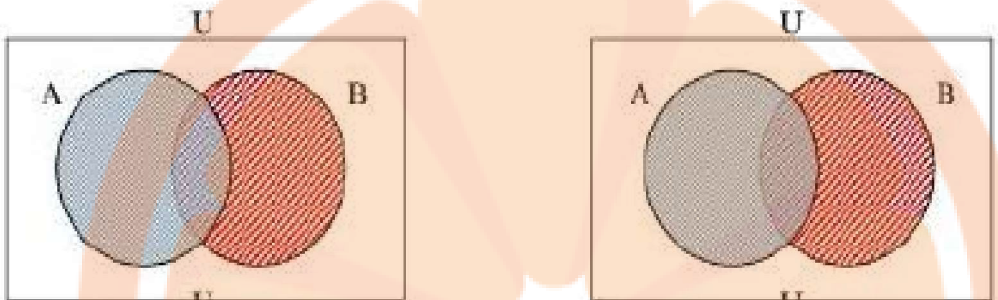
فصل1-درس3

درس سوم : قوانین و اعمال بین مجموعه ها(جبر مجموعه ها)

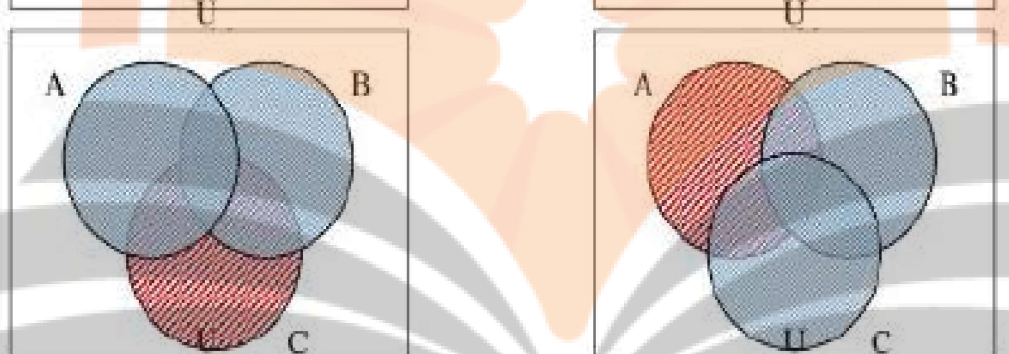
فعالیت صفحه ۲۶

۱-در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (د) از دو رنگ استفاده کنید).

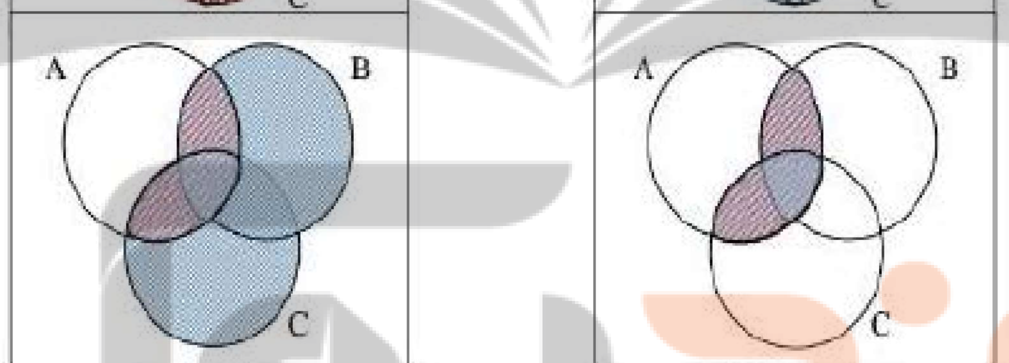
الف)



ب)



پ)



A∩(B∪C) (A∩B)∪(A∩C)

۲- با فرض اینکه $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶\}$ در این صورت، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A\cap B = B\cap A$

$A\cap B=\{۳\}$, $B\cap A=\{۳\}$

$$\begin{cases} ۳\in A\cap B \Rightarrow ۳\in A \wedge ۳\in B \Rightarrow ۳\in B\cap A \Rightarrow A\cap B\subseteq B\cap A \\ ۳\in B\cap A \Rightarrow ۳\in A \wedge ۳\in B \Rightarrow ۳\in A\cap B \Rightarrow B\cap A\subseteq A\cap B \end{cases}$$

$A\cap B\subseteq B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

$B\cap C=\{۵\}$; $A\cap B=\{۳\}$; $A\cap(B\cap C)=\emptyset$; $(A\cap B)\cap C=\emptyset$

با توجه به اینکه دو مجموعه‌ی $A\cap(B\cap C)$; $(A\cap B)\cap C$ تهی هستند و هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است

بنابراین تهی نیز زیرمجموعه‌ی تهی است و داریم:

$$\begin{cases} A\cap(B\cup C)\subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C) \\ (A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)\end{cases} \Rightarrow A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

پ) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$B\cup C=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$, $A\cap B=\{۳\}$, $A\cap C=\{۱,۲\}$

, $A\cap(B\cup C)=\{۱,۲,۳\}$, $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{۱,۲,۳\}$

$\forall x\in A\cap(B\cup C) \Rightarrow x\in\{۱,۲,۳\} \Rightarrow x\in\{۱,۲,۳\}\wedge x\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$\Rightarrow x\in\{۱,۲,۳\} \Rightarrow x\in\{۳\}\vee x\in\{۱,۲\} \Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad (۱)$$

$\forall x\in (A\cap B)\cup(A\cap C) \Rightarrow x\in\{۱,۲,۳\} \Rightarrow x\in\{۱,۲,۳\}\wedge x\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$\Rightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C) \Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C) \qquad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

کار در کلاس صفحه ۲۸

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای «$\cup$» و «$\cap$» اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید:

۱-ثابت کنید، برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B از مجموعه‌ی مرجع U، داریم:

$A\cup B=\{x\in U|\ x\in A\vee x\in B\}$ — **تعریف اجتماع**

$=\{x\in U|\ x\in B\vee x\in A\}$ — **جا به جایی«$\vee$»**

$=B\cup A$

۲-ثابت کنید، برای سه مجموعه‌ی دلخواه C,B,A از مجموعه‌ی مرجع U، داریم:

$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C) \;=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in(B\cup C)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U \mid x\in A \vee (x\in B \vee x\in C\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U \mid (x\in A \;\vee\; x\in B) \vee x\in C\}$ شرکت پذیری «$\vee$»

$=\{x\in U \mid \; x\in(A\cup B) \;\vee x\in C$ تعریف اجتماع

$=(A\cup B)\cup C$

۳-با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع‌پذیری «$\cup$» نسبت به «$\cap$» را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\forall x;$ [فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$

$\Rightarrow\; [x\in A \;\vee\; (x\in B\cap C]$ تعریف اجتماع

$\Rightarrow\; [(x\in A \;\vee\; (x\in B \;\wedge\; x\in C)]$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow\; [(x\in A \;\vee x\in B) \;\wedge\; (x\in A \;\vee\; x\in C)]$ توزیع پذیری «$\vee$» نسبت به «$\wedge$»

$\Rightarrow\; [x\in(A\cup B) \;\wedge\; x\in(A\cup C)]$ تعریف «$\cup$»

$\Rightarrow\; x\in[(A\cup B) \;\cap x\in(A\cup C)]$ تعریف اشتراک

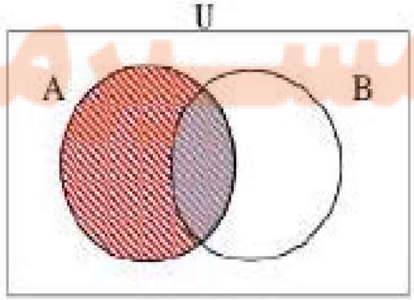
$\Rightarrow\; A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

کار در کلاس صفحه ۳۰

(قوانین جذب یا همپوشانی) اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند، با استفاده از قضیه‌ی قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

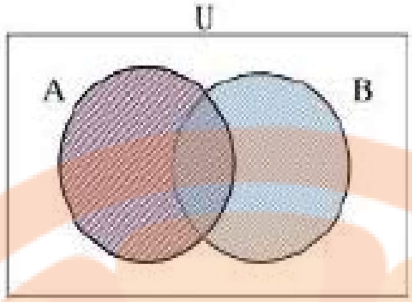
ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:

الف) $A\cup(A\cap B)=A$



$A\cup(A\cap B)$

ب) $A\cap(A\cup B) = A$



$A\cap(A\cup B)$

در هر دو قسمت جواب مجموعه‌ی A می‌شود.

در قضیه‌ی قبل ملاحظه گردید که اگر $C \subseteq D$ در این صورت $(C\cup D) = D$ و $(C\cap D) = C$ است.

اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می دانیم: $(A\cap B) \subseteq A \overset{\text{قضیه}}{\Longrightarrow} A\cup(A\cap B) = A$

اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می دانیم: $A \subseteq (A\cup B) \overset{\text{قضیه}}{\Longrightarrow} A\cap(A\cup B) = A$

روش دیگری برای اثبات قوانین جذب نیز وجود دارد که شما با پر کردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B) = (A\cap U)\cup(A\cap B)$

$= A\cap(U\cup B)$ **توزیع پذیری**

$= A\cap U = A$

ب) $A\cap(A\cup B) = (A\cup A)\cap(A\cup B)$

$= A\cup(A\cap B)$ **توزیع پذیری**

$= A\cup A = A$

مثال صفحه ۳۱

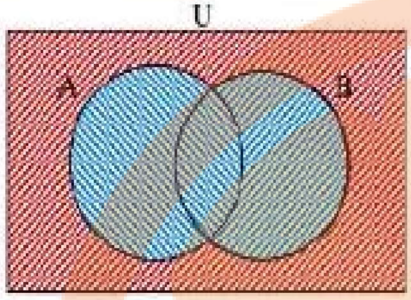
عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

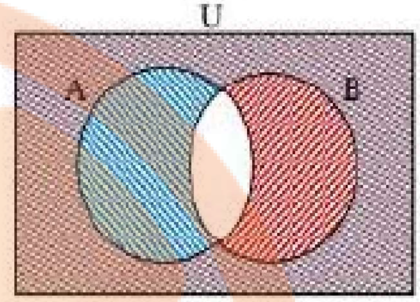
$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B]) = (A\cap B)\cup[(B\cup C)\cap B] = (A\cap B)\cup B = B$

فعالیت صفحه ۳۲

۱- فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند. روی شکل سمت چپ، $(A\cap B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



جواب: قسمتی که هم قرمزرنگ و هم آبی رنگ است.



جواب: قسمت قرمزرنگ

نتیجه می گیریم این دو مجموعه با هم مساوی است.

۲- اگر فرض کنیم: $U=\{۱,۲,...,۱۰\}$ و $A=\{۲,۳,۵,۸\}$ و $B=\{۳,۴,۶,۸\}$ هریک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\cup B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$A\cap B=\{۳,۸\} \rightarrow (A\cap B)'=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۹,۱۰\}$

$A'=\{۱,۴,۶,۷,۹,۱۰\}\ ,\ B'=\{۱,۲,۵,۷,۹,۱۰\}$

$\Rightarrow\ (A'\cup B')=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۹,۱۰\}$

نتیجه می گیریم : $(A\cap B)'=A'\cup B'$

$\forall x; [x\in (A\cap B)' \Rightarrow x\notin (A\cup B) \Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in A' \wedge x\in B' \Rightarrow x\in (A'\cap B')] \Rightarrow (A\cup B)'\subseteq (A'\cap B')$ (۱)

$\forall x; [x\in (A'\cap B') \Rightarrow x\in A' \wedge x\in B' \Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

$x\notin (A\cup B) \Rightarrow x\in (A\cup B)' \Rightarrow (A'\cap B')\subseteq (A\cup B)'$ (۲)

$(۱),(۲) \Rightarrow A'\cap B'=(A\cup B)'$

کار در کلاس صفحه ۳۳

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A-B)' = (A'\cup B)$

$(A-B)' = (A\cap B')' = A'\cup(B')' = A\cup B$

ب) $(A-B)-C = (A-C)-B$

$(A-B)-C = (A\cap B')\cap C' = (A\cap C')\cap B' = (A-C)-B$

پ) $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$

$A-(B\cap C) = A\cap(B\cap C)' = A\cap(B'\cup C') = (A\cap B')\cup(A\cap C') = (A-B)\cup(A-C)$

مثال صفحه ۳۳

با استفاده از جبر مجموعه‌های درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف)$A-(B\cup C)(A-B)\cap(A-C)$

$(A-B)\cap(A-C) = (A\cap B')\cap(A\cap C')$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$= [(A\cap B')\cap A]\cap C'$	شرکت پذیری
$= [A'\cap(A\cap B')]\cap C'$	جا به جایی
$= [(A\cap A)\cap B']\cap C'$	شرکت پذیری
$= (A\cap B')\cap C'$	$A\cap A = A$
$= A\cap(B'\cap C')$	شرکت پذیری
$= A-(B'\cap C')$	تبدیل اشتراک به تفاضل
$= A-(B\cup C)$	قانون دمورگان

ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

$(A\cap B)-(A\cap C) = (A\cap B)\cap(A\cap C)'$ تبدیل تفاضل به اشتراک

$= (A\cap B)\cap(A'\cup C')$ قانون دمورگان

$= [(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$ توزیع پذیری

$= [(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]$ قوانین جا به جایی و توزیع پذیری

$= (\emptyset\cap B)\cup[A\cap(B-C)]$ تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم

$= \emptyset\cup[A\cap(B-C)]$ اشتراک هر مجموعه ای با تهی، تهی می‌شود.

$= A\cap(B-C)$ اجتماع هر مجموعه ای با تهی، خود مجموعه می‌شود.

پ) $A-(B-C)=(A-B)-C$

با کمی تأمل پی می‌بریم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر، دچار مشکل می‌شویم و این کار انجام نمی‌شود. ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم:

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۵,۶,۷\}$ و $U=\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$

$A-(B-C)=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۴\}=\{۱,۲,۵\}$

$(A-B)-C=\{۱,۲\}-\{۵,۶,۷\}=\{۱,۲\}$

$\Rightarrow \{۱,۲,۵\}\neq\{۱,۲\} \Rightarrow A-(B-C)=(A-B)-C$

ت) $A=B$ آنگاه $(A\cup B)=(A\cap B)$

وقتی می‌نویسیم: $C = D$، یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی بین مجموعه‌ها تساوی به کار می‌بریم، می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع، یا اشتراک بگیریم، یعنی از اینکه $C = D$ نتیجه می‌شود:

$A\cap C=A\cap D$ و $A\cup C=A\cup D$

$A\cup B=A\cap B \Rightarrow A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cap B)$

$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A=(A\cap B) \xrightarrow{\text{قضیه}} A\subseteq B$ (۱)

$(A\cup B)=(A\cap B) \Rightarrow A\cup(A\cup B)=A\cup(A\cap B)$

$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A\cup B)=A \xrightarrow{\text{قضیه}} B\subseteq A$ (۲)

$(۱),(۲) \Rightarrow A=B$

کار در کلاس صفحه ۳۴

۱- اگر $A = \{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ و $B = \{۵, ۶, ..., ۱۵\}$ و $U = \{۱, ۲, ..., ۲۰\}$ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(A \cap B') \cup (A \cap B)$

$B' = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰\}$

$(A \cap B') = \{۱، ۲، ۳، ۴\}$ ، $(A \cap B) = \{۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰\}$

$(A \cap B') \cup (A \cap B) = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰\} = U$

با استفاده از جبر مجموعه ها : $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A$

ب) $(A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A'])$

$A - B = \{۱، ۲، ۳، ۴\}$ ، $(A \cap B') = \{۱، ۲، ۳، ۴\}$

$B - A = \{۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵\}$ ، $A' = \{۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵\}$

$(A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A'])$

$= \{۱، ۲، ۳، ۴\} \cup \underbrace{(\{۱، ۲، ۳، ۴\} \cap \{۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵\} \cup \{۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵\}])}_{\emptyset}$

$= \{۱، ۲، ۳، ۴\}$

با استفاده از جبر مجموعه‌ها:

$(A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A'])$

$(B - A) \cup A' = (B - A) \cap (A')'$

$= (B - A) \cap A = (B \cap A') \cap A$

$= B \cap (A' \cap A)$

$= B \cap \emptyset$

$= \emptyset$

$(A - B) \cup [(A \cap B') \cap \emptyset]$

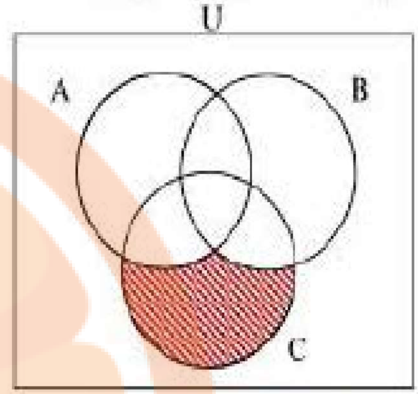
$\Rightarrow (A - B) \cup (\emptyset) = A - B$

$= A \cap B'$

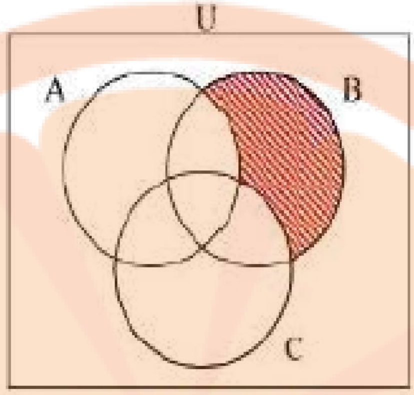
$= \{۱، ۲، ۳، ۴\}$

۲-با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است، ماقند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.

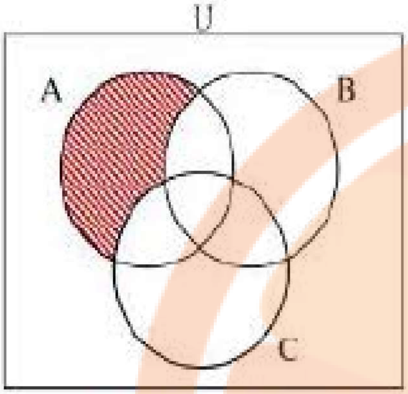
ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه‌اند.



اعضای مجموعه‌ی C

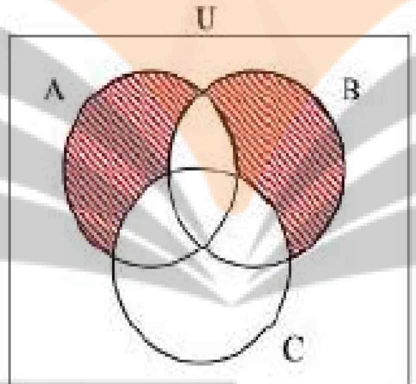


اعضای مجموعه‌ی B

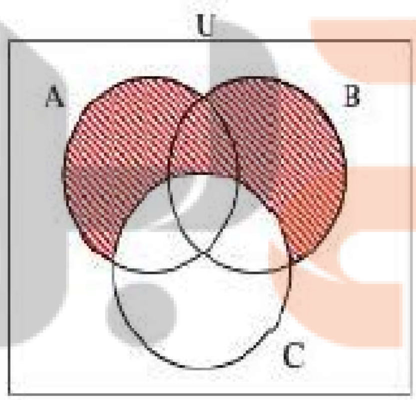


اعضای مجموعه‌ی A

پ) اعضایی که در A و B باشند، ولی در C نباشند.



ت) اعضایی که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.



مثال صفحه ۳۵

اگر $A = \{۲ , ۴ , ۶\}$ و $B = \{۴ , ۵\}$، در این صورت مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$$A \times B = \{(۲ , ۴), (۲ , ۵), (۴ , ۴), (۴ , ۵), (۶ , ۴), (۶ , ۵)\}$$
$$B \times A = \{(۴ , ۲), (۴ , ۴), (۴ , ۶), (۵ , ۲), (۵ , ۴), (۵ , ۶)\}$$

کار در کلاس صفحه ۳۵

در مثال قبل دیدید که در مجموعه‌ی $A \times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل شش زوج مرتب به وجود آمد، حال اگر $n(A) = m$ و $n(B) = k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید، $n(A \times B) = mk$.

با توجه به اینکه هر عضو مجموعه A به تعداد اعضای مجموعه B زوج مرتب تولید می کند و مجموعه A، m عضو دارد، داریم:

$A = \{\underset{k}{\underline{a_1}} , \underset{k}{\underline{a_2}} , \dots , \underset{k}{\underline{a_m}}\}$

$a_1 =$ عضو اول مجموعه A

$a_2 =$ عضو دوم مجموعه A

⋮

$a_m =$ عضو m ام مجموعه A

و بنابر اصل ضرب داریم: $m \times k$

$\Rightarrow \ n(A \times B) = mk$

فعالیت صفحه ۳۶

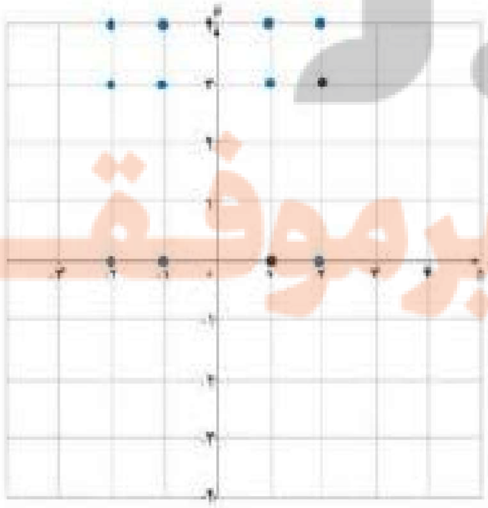
۱. اگر $A = \{۱ , -۱ , ۲ , -۲\}$ و $B = \{۰ , ۳ , ۴\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A \times B)$ و $(B \times A)$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هریک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A \times B =$

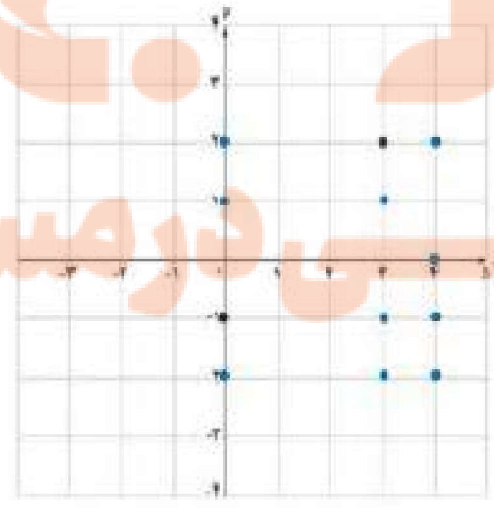
$\{(۱ , ۰), (۱ , ۳), (۱ , ۴), (-۱ , ۰), (-۱ , ۳), (-۱ , ۴), (۲ , ۰), (۲ , ۳), (۲ , ۴), (-۲ , ۰), (-۲ , ۳), (-۲ , ۴)\}$

$B \times A =$

$\{(۰ , ۱), (۰ , -۱), (۰ , ۲), (۰ , -۲), (۳ , ۱), (۳ , -۱), (۳ , ۲), (۳ , -۲), (۴ , ۰), (۴ , -۱), (۴ , ۲), (۴ , -۲)\}$



نمودار مختصاتی $A \times B$



نمودار مختصاتی $B \times A$

تمرین صفحه ۳۸

۱- با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جا به جایی، شرکت پذیری و توزیع پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره ها، هریک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x \in U | x \in B \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{x \in U | x \in A \wedge x \in B \cap C\} \\ &= \{x \in U | x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C\} \\ &= \{x \in U | (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\} \\ &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= x \in A \cap (B \cup C) \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \cup C) \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \wedge x \in A \cap C \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ &\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

به طور مشابه ثابت می شود $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند.

۲- درستی هریک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') \Rightarrow \left(A \cap \left(\overbrace{B \cup B'}^{U}\right)\right) = A$$

ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

$$(A' \cap A) \cap (B' \cap A) = \emptyset$$

پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cap C) &= (A \cap A) \cap (B \cap C) \\
&= A \cap \big(A \cap (B \cap C)\big) \\
&= A \cap \big((A \cap B) \cap C\big) \\
&= A \cap \big(C \cap (A \cap B)\big) \\
&= (A \cap C) \cap (A \cap B) \\
&= (A \cap B) \cap (A \cap C)
\end{aligned}
$$

ت) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cup C) &= (A \cup A) \cup (B \cup C) \\
&= A \cup \big(A \cup (B \cup C)\big) \\
&= A \cup \big((A \cup B) \cup C\big) \\
&= A \cup \big(C \cup (A \cup B)\big) \\
&= (A \cup C) \cup (A \cup B) \\
&= (A \cup B) \cup (A \cup C)
\end{aligned}
$$

۳-هریک از عبارت های زیر را ساده کنید:

الف) $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$

$$\underbrace{(B \cap A') \cup \left[\underbrace{(B \cap A) \cap B'}_{B \cap A}\right]}_{B \cup A} \cap (B \cup A) = (B - A) \cup (B \cup A) \xrightarrow{(B-A) \subseteq (B \cup A)} = (B \cup A)$$

ب) $(A \cup B) - B$

$$(A \cup B) \cap B' = \left(\overbrace{A \cap B'}^{A-B}\right) \cup \left(\overbrace{B \cap B'}^{\emptyset}\right) = (A - B) = (B \cap A') \cup (B \cap A) = B \cap (A' \cup A) = B$$

پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

$$\left[(A \cup B) \cap A\right] \cup (A \cap B) = \left[\left(\underbrace{A \cap A'}_{\emptyset}\right) \cup (B \cap A')\right] \cup (A \cap B) = (B \cap A') \cup (A \cap B)$$

$$= B \cap \left(\underbrace{A \cup A'}_{U}\right) = B$$

۴- درستی هریک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \subset X) \wedge (A' \subset X) \Rightarrow X = U$

$(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow (A \cup A') \subseteq X \Rightarrow U \subseteq X$

از طرفی می‌دانیم همواره $X \subseteq U$ ، بنابراین $X = U$ است.

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap \left(\underbrace{B' \cup B}_{U}\right) = A$$

پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

$$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap (C' \cap C')$$
$$= (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$$

ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) \cap (A' \cap B')$$
$$= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] = \left[\left(\underbrace{A \cap A'}_{\emptyset}\right) \cup \left(\underbrace{B \cap A'}_{B-A}\right)\right] \cup \left[\left(\underbrace{A \cap B'}_{A-B}\right) \cup \left(\underbrace{B \cap B'}_{\emptyset}\right)\right]$$
$$= (B - A) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

ث) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$

$(A \cup B) \cap (A \cap B)' = \emptyset$

ج) $(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C) \Rightarrow B = C$

$$B = B \cap (A \cup B) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C)$$
$$\xrightarrow{A \cap B = A \cap C} = (A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} = C \cap (A \cup C) = C$$

۵-اگر $A = \{y + ۲ و ۵ و z\}$ و $B = \{x + ۱ و ۴ و -۲\}$ در این صورت، با فرض $A \times B = B \times A$ بیشترین مقدار برای $(x + y + z)$ را بیابید.

می‌دانیم اگر $A \times B = B \times A$ باشد، خواهیم داشت $A = B$ ، بنابراین $\{y + ۲ و ۵ و z\} = \{x + ۱ و ۴ و -۲\}$.

واضح است که ۵ فقط می‌تواند با $x + ۱$ برابر باشد، لذا $x = ۴$ است. اما در دو مورد دیگر دو حالت داریم:

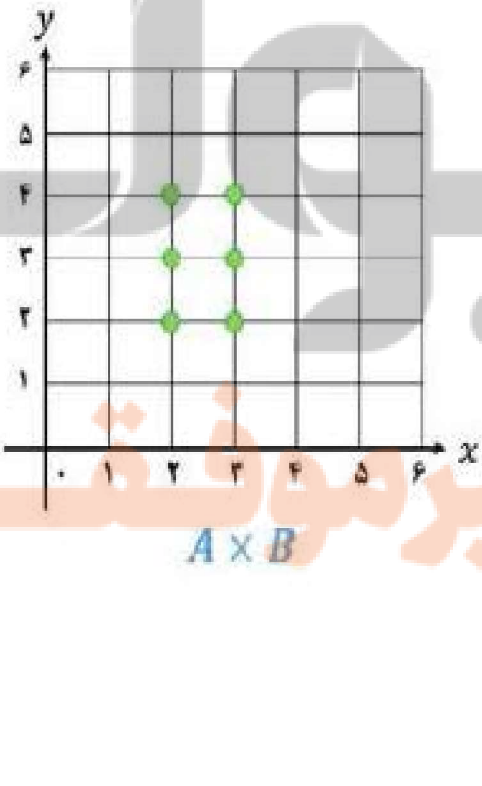
$$[(y + ۴) \wedge (z = -۲)] \vee [(y + ۲ = -۲) \wedge (z = ۴)]$$
$$\Rightarrow [(y = -۲) \wedge (z = -۲)] \vee [(y = -۴) \wedge (z = ۴)]$$
$$\Rightarrow y + z = ۰$$
$$\Rightarrow x + y + z = ۴$$

۶-با توجه به مجموعه های داده شده، نمودار هریک از حاصل ضرب های $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.

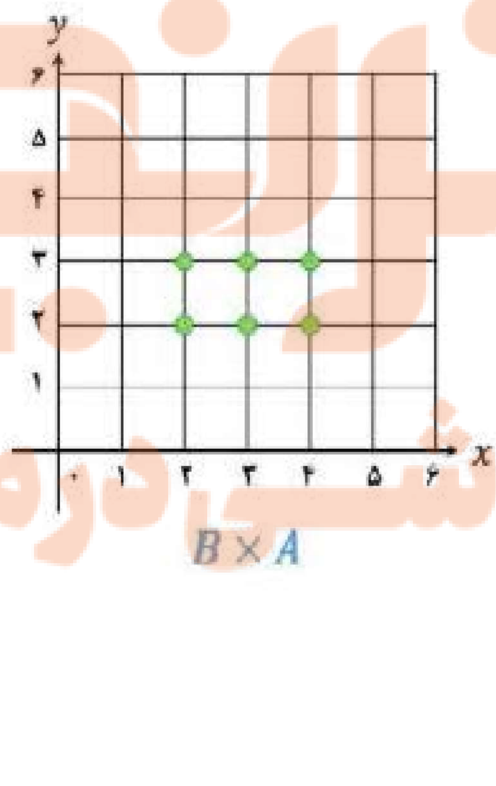
الف) $A = \{۲و۳\} ، B = \{۲و۳و۴\}$

$A \times B = \{(۲و۲) ، (۲و۳) ، (۲و۴) ، (۳و۲) ، (۳و۳) ، (۳و۴)\}$

$B \times A = \{(۲و۲) ، (۲و۳) ، (۳و۲) ، (۳و۳) ، (۴و۲) ، (۴و۳)\}$

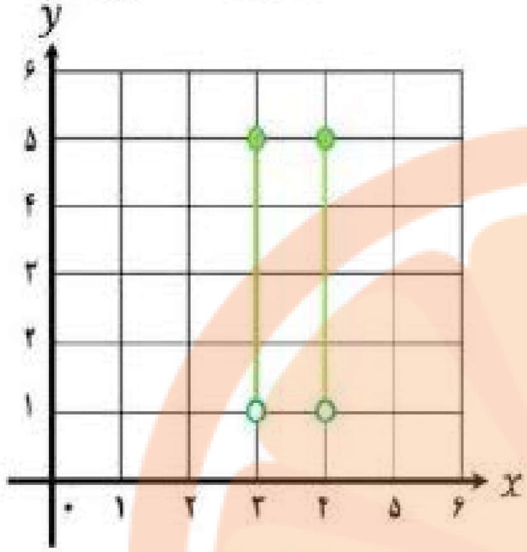


$A \times B$

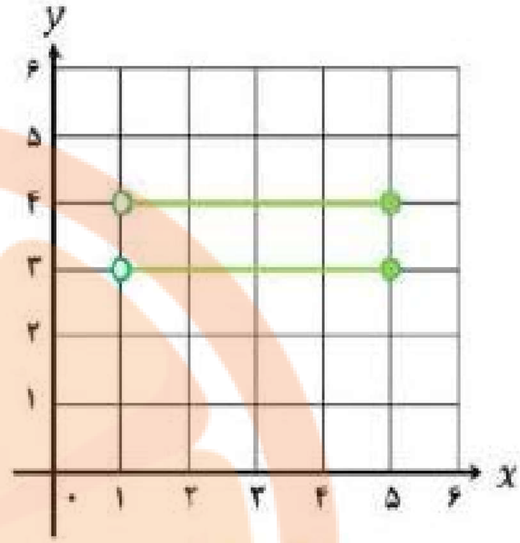


$B \times A$

ب) $A = \{۳ و ۴\}$ ، $B = (۱ و ۵]$

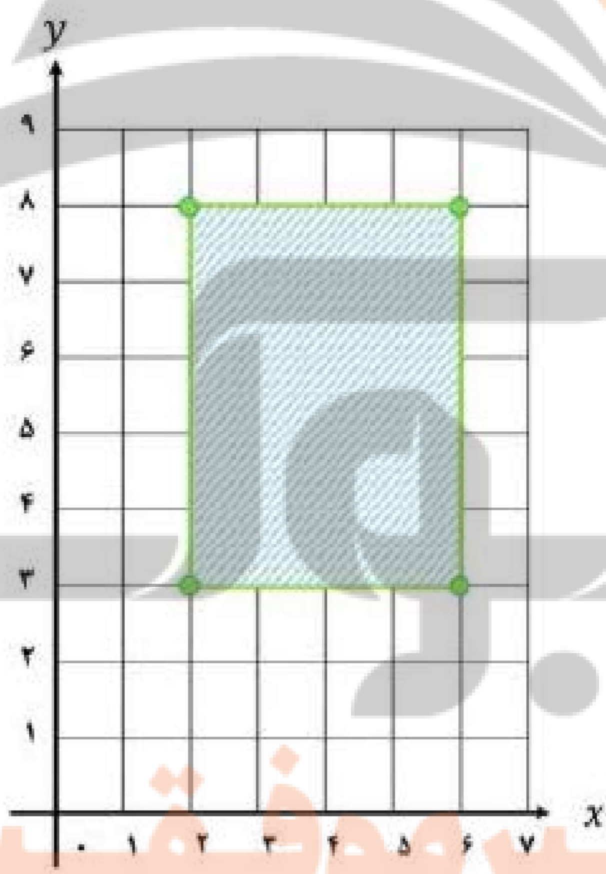


$A \times B$

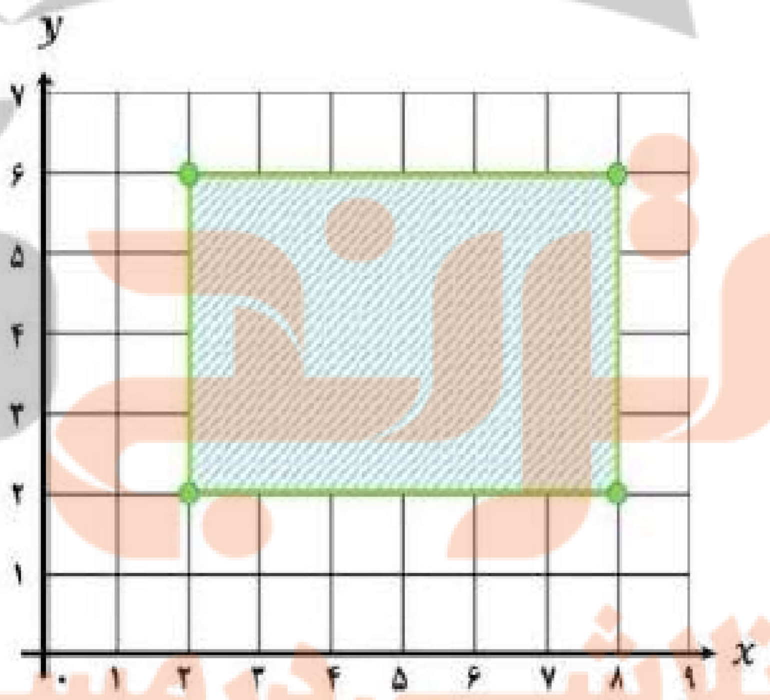


$B \times A$

پ) $A = [۲ و ۶]$ ، $B = [۳ و ۸]$

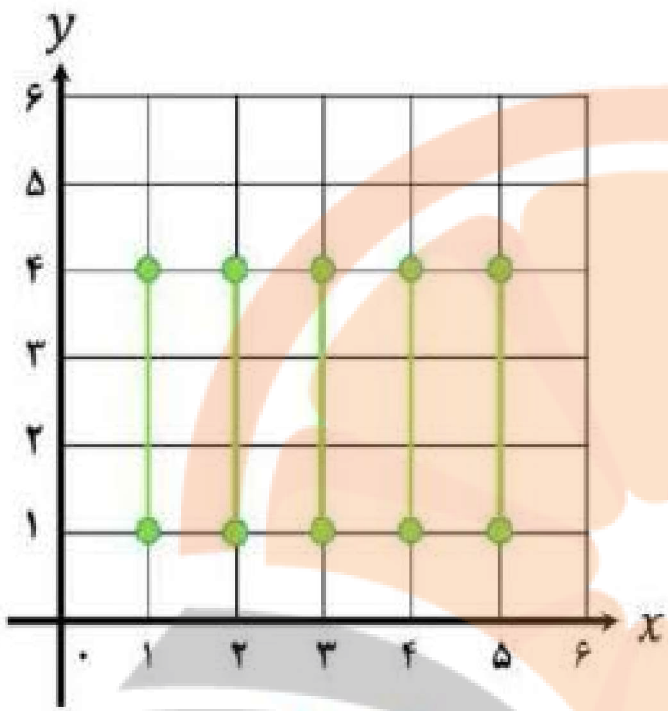


$A \times B$

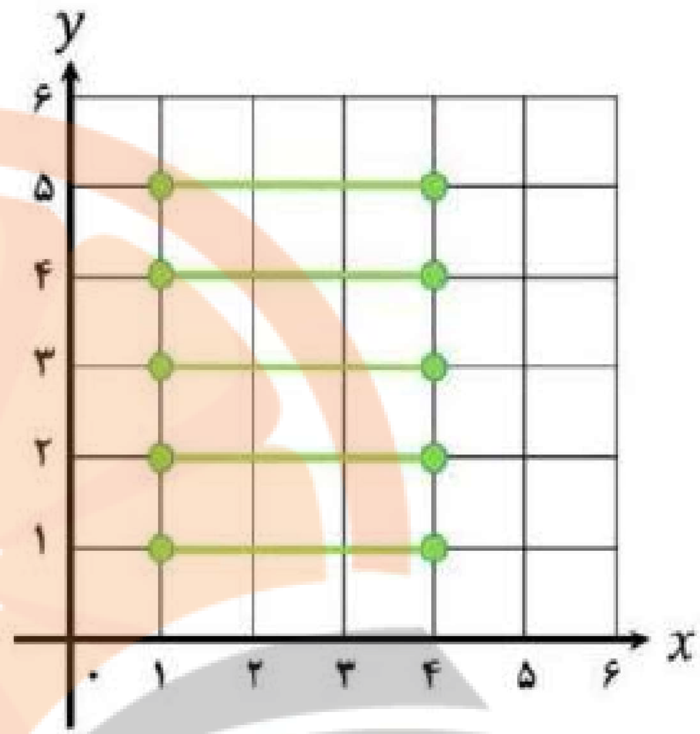


$B \times A$

ت) $A = \mathbb{N}$ ، $B = [۱و۴]$

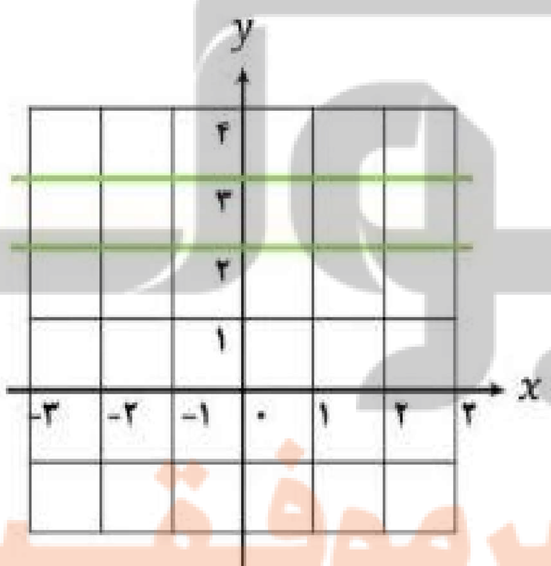


$A \times B$

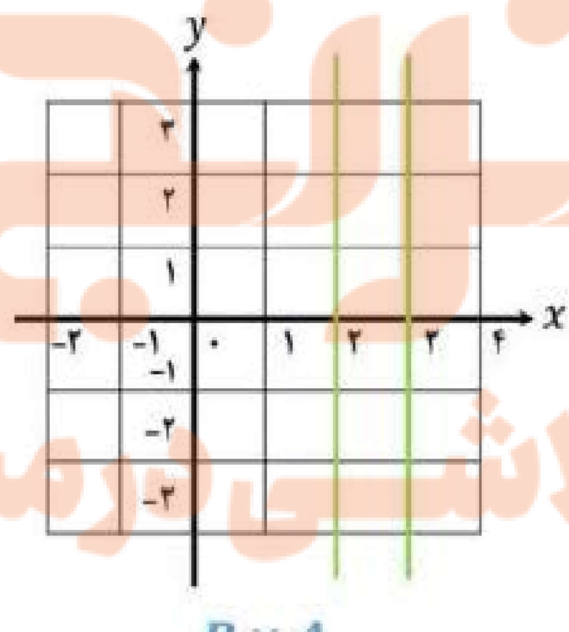


$B \times A$

ت) $A = \mathbb{R}$ ، $B = \{۲و۳\}$



$A \times B$



$B \times A$

فصل2-درس1:مبانی احتمال

فصل2-درس1

درس اول : مبانی احتمال

کار در کلاس صفحه ۴۱

کدام‌یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام‌یک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران گفت‌وگو کنید.

صورت مسئله	آمار	احتمال
۱-می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟		×
۲-درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟	×	
۳-۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟		×
۴-در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴ ، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟		×
۵-چه تعداد از دانش‌آموزان پایه‌ی یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟	×	

فعالیت صفحه ۴۱

برق‌کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اولی و دومی، به‌ترتیب، ۵ و ۲۰ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم‌اند؛ در اولی سه لامپ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به‌تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

جواب این سؤال ساده است: در جعبه اول ۶۰ درصد و در جعبه دوم ۶۵ درصد لامپ‌ها سالم‌اند، پس بهتر است جعبه دوم را انتخاب کند.

کار در کلاس صفحه ۴۲

به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبه‌ی اول مذکور انتخاب کرد؟

۵ حالت برای انتخاب لامپ اول داریم و۴ حالت برای انتخاب لامپ دوم. با توجه به اصل دکارتی ضرب کلاً $= ۴ \times ۵$ ۲۰ حالت وجود دارد.

در چند حالت هر دو لامپ معیوب است؟ مشابه همین سؤال ها را در مورد جعبه دوم بررسی کنید. با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه رابرای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

چون می‌خواهیم لامپ‌ها معیوب باشند برای انتخاب اول ۲ حالت داریم و برای انتخاب دوم یک حالت باقی می‌ماند بنابراین $۲ = ۱ \times ۲$ حالت داریم.

در مورد جعبه دوم انتخاب دو لامپ از بین ۲۰ لامپ را داریم : $۳۸۰ = ۱۹ \times ۲۰$ و چون ۷ لامپ معیوب است، تعداد $۴۲ = ۶ \times ۷$ حالت برای معیوب بودن دو لامپ داریم. احتمال معیوب بودن در جعبه اول $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۲}{۱۰}$ و در جعبه ی دوم $\frac{۴۲}{۳۸۰}$ بنابراین انتخاب جعبه اول بهتر است.

کار در کلاس صفحه ۴۳

زهرا و شبنم در مورد سؤالی که دربارهی پرتاب یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می‌کنند. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟ شبنم درست می‌گوید.

- زهرا: فضای نمونه در این مسئله مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ..., ۶\}$ است.
- شبنم: بله، من هم موافق هستم. سؤالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را پرتاب کنیم و عدد ۲ بیاید، آیا پیشامد $\{۲, ۴, ۶\}$ رخ داده است؟
- زهرا: به نظرم نه، چون ۴ و ۶ هم علاوه بر ۲ عضواین پیشامدند.
- شبنم: ولی من فکر می‌کنم این پیشامد رخ داده است، چون این پیشامد، شامل عدد ۲ است.
- زهرا: پس ۴ و ۶ که نیامدند چه؟
- شبنم: یعنی باید آنها هم در پرتاب تاس آمده باشند تا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً اینطور که شما فکر می‌کنید، چگونه ممکن است پیشامد $\{۲, ۴, ۶\}$ رخ دهد؟ مگر می‌شود تاسی را پرتاب کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟!

کار در کلاس صفحه ۴۶

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱-دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کنید، ناسازگارند.

A: متولد ماه مهر باشد،

B: متولد فصل تابستان باشد.

۲-سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید، سازگارند.

A: هر سه بار مشابه بیاید،

B: زوج بار رو بیاید.

۳-فردا سازگارند.

A: خورشید در آسمان دیده شود.

B: باران ببارد.

۴- تاسی را پی در پی پرتاب می‌کنید، ناسازگارند.

A: برای اولین بار در مرتبه‌ی سوم ۶ بیاید،

B: تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

تمرین صفحه ی ۴۷

۱. احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده‌ی بازی است؟

{(سنگ و قیچی) (سنگ و کاغذ) (قیچی و کاغذ) (کاغذ و کاغذ) (کاغذ و قیچی) (قیچی و قیچی) (قیچی و سنگ)
(کاغذ و سنگ) (سنگ و سنگ)}

$\frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$ $\quad$ $۳^۲ = ۹$

۲. یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می‌شود، بلندقدترین عضو تیم باشد چقدراست؟

$\frac{۱}{۱۴}$

۳. در یک ایستگاه هواشناسی، در هرلحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

{صاف ،نیمه ابری ،ابری} × {باد نمی‌ورزد ، باد می‌وزد } × {مرطوب و خشک} × {گرم و سرد}
× {بارندگی رخ نداده ،بارندگی رخ} = ۲ × ۲ × ۲ × ۳ × ۲ = ۴۸

۴. فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A-B) = P(A) - P(B)$

$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(B)$
$B \subseteq A \Rightarrow A\cap B = B \Rightarrow P(A\cap B) = P(B)$

ب) اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(B) \le P(A)$

$B \subseteq A \Rightarrow B \le A \Rightarrow P(B) \le P(A)$

۵. عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید:

تمامی اعداد زوج ۵۰ تا= $P(A)$

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.

$P(A) = ۵۰ \quad P(B) = ۳۳ \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) = ۵۰ + ۳۳ = ۸۳$

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش‌پذیر نباشد.

$P(C) = ۵۰ - ۱۶ = ۳۴$

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.

$P(D) = ۱۰۰ - ۸۳ = ۱۷$

فصل2-درس2:احتمال غیر هم شانس

فصل2-درس2

درس دوم : احتمال غیر هم‌شانس

فعالیت صفحه ۴۸

یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی‌مانده عدد ۳ مشاهده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم،

۱-فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

$S=\{۱,۲,۳\}$

۲-با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این تاس قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به دست آورید.

$A=\{۱\} \Longrightarrow P(A)=\frac{۳}{۶}$

آیا می‌توانید از رابطه‌ی $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه‌ی احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟چرا؟

خیر، زیرا اعضای آن هم شانس نیستند.

۳-مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجوهی از تاس که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده است، احتمال وقوع پیشامدهای ساده $B=\{۲\}$ و $C=\{۳\}$ را به‌دست آورید.

$P(۲)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳} \quad , \quad P(۳)=\frac{۱}{۶}$

۴-آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A ، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید.

خیر، زیرا پیشامدها غیر هم‌شانس هستند.

۵- به کمک نتایج قسمت‌های قبل، مجموع تمام پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

$P(۱)+P(۲)+P(۳)=\frac{۳}{۶}+\frac{۲}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۶}{۶}=۱$

۶-اگر $D=\{۱,۲\}$ پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در پرتاب تاس باشد، $P(D)$ را به‌دست آورید. این مقدار را با $P(۱)+P(۲)$ مقایسه کنید.

$P(D)=\frac{۵}{۶}$

با توجه به اینکه سه وجه تاس عدد ۱ و دو وجه تاس عدد ۲ است، در پرتاب تاس اگر یکی از ۵ وجه مذکور ظاهر شود، پیشامد D رخ می‌دهد :

$P(۱)+P(۲)=\frac{۳}{۶}+\frac{۲}{۶}=\frac{۵}{۶}$

کار در کلاس صفحه ۵۰

۱-در یک آزمایش تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x,y\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{x,z\})=\frac{۱}{۲}$ احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

با توجه به اینکه x، y و z همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند، بنابراین $P(x)+P(y)+P(z)=۱$. پس خواهیم داشت :

$$\begin{cases}P(x)+P(y)+P(z)=۱\\ P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳}\end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{۳}+P(z)=۱ \Rightarrow P(z)=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \boxed{P(z)=\frac{۱}{۳}}$$

$$P(x)+P(z)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(x)+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow \boxed{P(x)=\frac{۱}{۶}}$$

$$P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۶}+P(y)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow P(y)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{P(y)=\frac{۱}{۲}}$$

۲-یک تاس به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را به‌دست آورید.

$P(a)=۳P(b)$ که در آن a یک عدد زوج و b یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. حال اگر $P(۱)=x$ و $P(۲)=۳x$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}&P(۱)=P(۳)=P(۵)\\ &P(۲)=P(۴)=P(۶)\\ &P(S)=۱ \Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱\\ &\Rightarrow x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱\\ &\Rightarrow ۱۲x=۱\\ &\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}P(۳)=\frac{۱}{۱۲}\\ P(۲)=۳\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\end{cases} \Rightarrow P(۲,۳)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \boxed{P(۲,۳)=\frac{۱}{۳}}$$

تمرین های صفحه ۵۱

۱. در پرتاب یک سکه‌ی ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

برای سکه سالم: $P(\text{رو})=\frac{۱}{۲}$ $\quad P(\text{زیر})=\frac{۱}{۲}$

برای سکه ناسالم: $P(\text{رو})=\frac{۱}{۲}P(\text{زیر})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

۲. در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده‌ی هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

$S=۶ \quad A=\{۱,۲,۳\} \quad P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

۳. اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c,d\}$ و $C=\{a,b,c\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A)=\frac{۲}{۷}$ و $P(B)=\frac{۳}{۵}$ مقدار $P(C')$ را به دست آورید.

$P(C)=\frac{۳}{۵} \qquad P(C')=۱-P(C)=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$

۴. در یک تجربه‌ی تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$, $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از این پیشامدها را به دست آورید.

$P(z)=\frac{۱}{۴}P(y) \quad P(y)=\frac{۱}{۴}P(x) \quad P(z)=\frac{۱}{۱۶}P(x)$

$$\begin{cases} P(x)+\frac{۱}{۴}P(x)+\frac{۱}{۱۶}P(x) \\ P(x)+P(y)+P(z)=۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{۲۱}{۱۶}P(x)=۱$$

$P(x)=\frac{۱۶}{۲۱} \quad P(z)=\frac{۱}{۲۱} \quad P(y)=\frac{۴}{۲۱}$

۵. در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است[۱]، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه‌ی اول، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه‌ی k ام، $(۲k-۱)x$ باشد:

---

[۱] مرز مشترک بین دو ناحیه را جزئ ناحیه‌ی کوچک‌تر محسوب کنید.

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

؟؟؟؟؟؟؟؟

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیه‌ی دوم یا پنجم؟ اول، سوم یا چهارم بیشتر است

$P(۱) = x$

.

.

.

.

$P(k) = ۲k - ۱$

$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) = ۱ \quad x + ۳x + ۵x + ۷x + ۹x = ۱ \Rightarrow ۲۰x = ۱ \quad x = \frac{۱}{۲۰}$

$P(۱) = \frac{۱}{۲۰} \quad P(۲) = \frac{۳}{۲۰} \quad P(۳) = \frac{۵}{۲۰} = \frac{۱}{۴} \quad P(۴) = \frac{۷}{۲۰} \quad P(۵) = \frac{۹}{۲۰}$

$P(۱) + P(۳) + P(۴) = \frac{۱}{۲۰} + \frac{۵}{۲۰} + \frac{۷}{۲۰} = \frac{۱۳}{۲۰}$

$P(۲) + P(۵) = \frac{۳}{۲۰} + \frac{۵}{۲۰} = \frac{۸}{۲۰}$

فصل2-درس3:احتمال شرطی

فصل2-درس3

درس سوم : احتمال شرطی

فعالیت صفحه ۵۲

۱- در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰ یکی را به تصادف انتخاب کنند. شمارهی کارت اکبر ۱۵ و شماره کارت بهرام ۷ است.

الف)احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟ احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟

احتمال برنده شدن هر دو با هم برابر است و مساوی با $\frac{1}{20}$ می‌باشد.

ب)وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می‌گوید: «عدد برنده، دو رقمی است!» اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟

احتمال برنده شدن بهرام صفر است چون شماره کارت او دو رقمی نیست و اکبر احتمال برنده شدن خود را $\frac{1}{11}$ می‌داند زیرا ۱۱ عدد از اعداد روی کارت‌ها دو رقمی است.

۲- در مدرسه‌ای سه کلاس یازدهم، با نام‌های ۱ـ۱۱ ، ۲ـ۱۱ و ۳ـ۱۱ وجود دارد که به‌ترتیب۳۲ ،۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به‌ترتیب ۸ ، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره‌ی کامل شده‌اند. یکی از دانش آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف)فضای نمونه که شامل همه‌ی دانش‌آموزان پایه یازدهم است، چند عضوی است؟

$S = \{s_1, s_2, s_3\} = 32 + 33 + 35 = 100$

ب)احتمال اینکه دانش‌آموز انتخاب شده نمره‌ی کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است؟

۲۳ نفر موفق به کسب نمره کامل شده‌اند . $8 + 9 + 6 = 23$ $P(A) = \frac{23}{100}$

پ)احتمال اینکه او، دانش‌آموز کلاس ۱ـ ۱۱ باشد (پیشامد B) چقدر است؟

$n(B) = 32$ $P(B) = \frac{32}{100}$

ت)فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش‌آموز کلاس ۱ـــ ۱۱ است. در این صورت،چقدر احتمال می‌دهید که او موفق به کسب نمره‌ی کامل شده باشد؟

در حل قسمت (ت) می‌توان این‌طور فکر کرد که فضای نمونه، که متشکل از ۱۰۰ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم است، بعد از اطلاع از اینکه او دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ است، به فضای نمونه‌ی دیگری، که متشکل از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ـ ۱۱ است، کاهش یافته است. سپس باید بررسی کنیم که چند نفر از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ موفق به کسب نمرهی

کامل شده‌اند. این یعنی تعداد اعضای پیشامد $A \cap B$ را بشماریم. نتیجه را باید به تعداد اعضای مجموعه‌ی B تقسیم کنیم.

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A|B)=\frac{۸}{۳۲}=\frac{۱}{۴}$$

کار در کلاس صفحه ۵۲

در فعالیت «قرعه‌کشی» احتمال شرطی کدام پیشامد نسبت به کدام پیشامد مورد سؤال قرار گرفته است؟

احتمال برنده شدن نسبت به پیشامد دو رقمی بدون شماره کارت.

کار در کلاس صفحه ۵۲

فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش چند عضوی است؟ آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟

فضای نمونه آزمایش $۳۶ = ۶ \times ۶$ عضوی می‌باشد که این فضای احتمال هم‌شانس است.

ب) می‌دانیم که مجموع عدد دو پرتاب از ۹ بیشتر شده است. در این صورت، احتمال اینکه دست‌کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

$$S=\{(۴,۶),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$
$$A=\{(۴,۶),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$
$$P(A)=\frac{۵}{۶}$$

فعالیت صفحه ۵۴

دوباره فرض کنید موضوع گفت‌وگوی احتمال هم‌شانس باشد؛ آیا می‌توانید سمت راست فرمول احتمال شرطی در حالت هم‌شانس را به شکلی بازنویسی کنید که به جای تعداد اعضای پیشامدها احتمال آنها آمده باشد؟

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

کار در کلاس صفحه ۵۵

در فعالیت مربوط به دانش‌آموزان پایه‌ی یازدهم که سه کلاس ۱ـ۱۱ ، ۲ـ۱۱ و ۳ـ۱۱ به‌ترتیب۳۲ ،۳۲ و ۳۵ دانش‌آموز دارند و در آزمونی مشترک در این سه کلاس، به‌ترتیب ۸ ، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره‌ی کامل شده‌اند. دانش آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد «دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ بودن» را B_1 می‌نامیم و B_2 و B_3 را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با A نمایش می‌دهیم.

الف)مقدار $P(A \mid B_i)$ را برای $i = 1,2,3$ محاسبه کنید.

$$P(A \mid B_1) = \frac{n(A \cap B_1)}{n(B_1)} = \frac{8}{32}$$

$$P(A \mid B_2) = \frac{n(A \cap B_2)}{n(B_2)} = \frac{9}{33}$$

$$P(A \mid B_3) = \frac{n(A \cap B_3)}{n(B_3)} = \frac{6}{35}$$

ب) مقدار $P(B_i \mid A)$ را برای $i = 1,2,3$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده‌اید چیست؟

$$P(B_1 \mid A) = \frac{n(B_1 \cap A)}{n(B_1)} = \frac{8}{23}$$

$$P(B_2 \mid A) = \frac{n(B_2 \cap A)}{n(B_2)} = \frac{9}{23}$$

$$P(B_3 \mid A) = \frac{n(B_3 \cap A)}{n(B_3)} = \frac{6}{23}$$

$P(B_i \mid A)$ احتمال اینکه دانش‌آموزی از کلاس B_i باشد به شرط آنکه نمره‌ی کامل را بیاورد، نشان می‌دهد. که جواب این احتمال میزان موفقیت هر کلاس را بیان می‌کند.

پ)با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش‌آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق‌تر می‌دانید؟

کلاس ۱-۱۱

برای پاسخ دادن به این سؤال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (ب)؟ پاسخ قسمت (الف)

کار در کلاس صفحه ۵۶

فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. نشان دهید :

الف)اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند:

$$P\left((A_۱ \cup A_۲)\middle|B\right) = P(A_۱|B) + P(A_۲|B)$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که دو پیشامد $A_۱ \cap B$ و $A_۲ \cap B$ ناسازگارند:

$$\xRightarrow[\text{ناسازگارند}]{\text{طبق فرض } A_۱ \text{ و } A_۲} A_۱ \cap A_۲ = \emptyset \Rightarrow (A_۱ \cap B) \cap (A_۲ \cap B) = (A_۱ \cap A_۲) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

حال داریم :

$$P\left((A_۱ \cup A_۲)|B\right) = \frac{P\left((A_۱ \cup A_۲) \cap B\right)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{P\left((A_۱ \cap B) \cup (A_۲ \cap B)\right)}{P(B)} = \frac{P\left((A_۱ \cap B)\right)}{P(B)} + \frac{P\left((A_۲ \cap B)\right)}{P(B)} = P(A_۱|B) + P(A_۲|B)$$

ب)برای هر پیشامد A داریم: $P(A'|B) = ۱ - P(A|B)$

$$P\left((A \cup A')\middle|B\right) = P(A|B) + P(A'|B) \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم :

$$A \cup A' = S \Rightarrow P\left((A \cup A')|B\right) = P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = ۱ \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow ۱ = P(A|B) + P(A'|B) \Rightarrow P(A'|B) = ۱ - P(A|B)$$

کار در کلاس صفحه ۵۷

با داده‌های مثال قبل، اگر سه گوی را به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج کنیم، احتمال اینکه اولی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

A : پیشامد سبز بودن گوی اول

B : پیشامد سفید بودن گوی دوم

C : پیشامد قرمز بودن گوی سوم

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B) = \frac{۱}{۶} \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲۰}$$

فعالیت صفحه ۵۸

دو کیسه داریم که اولی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن گویی را برمی‌داریم. می‌خواهیم احتمال سفید بودن این گوی را محاسبه کنیم.

سه پیشامد A ، B_1 و B_2 را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : گوی برداشته شده سفید است.

B_1 : کیسه‌ی اول انتخاب شده است.

B_2 : کیسه‌ی دوم انتخاب شده است.

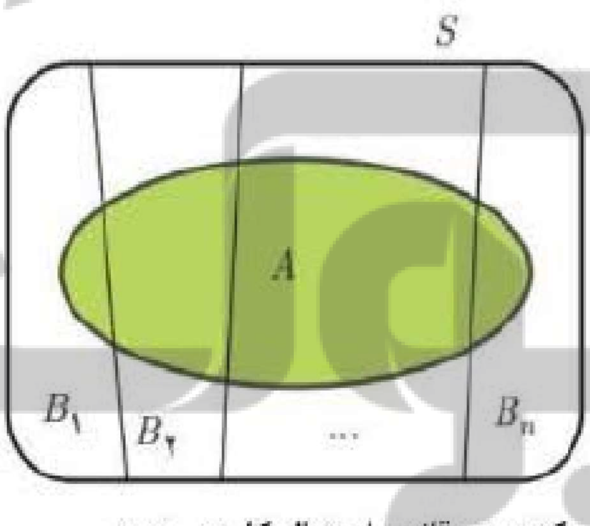
پس هدف محاسبه $P(A)$ است. طبق اطلاعات داده شده $P(A \mid B_1)$ ، $P(A \mid B_2)$ به‌ترتیب، برابر $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{10}$ هستند. به علاوه واضح است که $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. چون کیسه‌ی انتخابی یا کیسه‌ی اول است یا کیسه‌ی دوم. پس B_1 و B_2 فضای نمونه را افراز می‌کنند. این نتیجه می‌دهد که $A \cap B_1$ و $A \cap B_2$ نیز A را افراز می‌کنند. پس :

$$P(A) = P\big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)\big) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

$$= P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

کار در کلاس صفحه ۵۹

با انجام مراحل زیر قانون احتمال کل را ثابت کنید :



۱-این فرض که B_1 ، B_2 و ... B_n فضای نمونه را افراز می‌کنند؛ یعنی دو به دو **از هم مجزا هستند** و $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = S$.

۲-در این صورت $A \cap B_1$ ، $A \cap B_2$ و ... $A \cap B_n$ دو به دو از هم مجزا هستند و اجتماع آنها برابر A می‌شود. در نتیجه داریم :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

۳-اگر جملات داخل سیگما را به کمک قانون ضرب احتمال بازنویسی کنید، به قانون احتمال کل می‌رسید.

$$P(A) = P\big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)\big)$$
$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$$
$$= P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \cdots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

کار در کلاس صفحه ۵۹

میوه‌فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه‌دار باشد، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق‌ها برمی داریم لکه‌دار باشد چقدر است؟

B_1 : سیب انتخابی از باغ شمالی

B_3 : سیب انتخابی از باغ جنوبی

B_2 : سیب انتخابی از باغ مرکزی

A : پیشامد لکه‌دار بودن سیب انتخابی

$P(B_1)=\frac{3}{10}$ $\quad$ $P(A|B_1)=\frac{10}{100}$

$P(B_2)=\frac{5}{10}$ $\quad$ $P(A|B_2)=\frac{3}{100}$

$P(B_3)=\frac{2}{10}$ $\quad$ $P(A|B_3)=\frac{5}{100}$

با استفاده از قانون احتمال کل داریم :

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{3}{100}+\frac{15}{100}+\frac{10}{100}=\frac{28}{100}$$

فعالیت صفحه ۶۱

فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف)احتمال اینکه این صندوق مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟ در مورد دو باغ دیگر این احتمال چقدر است؟

B_1 : سیب انتخابی از باغ شمالی ، B_2 : سیب انتخابی از باغ مرکزی ، B_3 : سیب انتخابی از باغ جنوبی

$P(B_1)=\frac{1}{3}$ ، $P(B_2)=\frac{1}{3}$ ، $P(B_3)=\frac{1}{3}$

ب)اکنون سیبی را به تصادف از داخل صندوق انتخابی خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. آیا بعد از این مشاهده، نظر شما در مورد احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، تغییر کرده است؟ بله

پ)به‌طور شهودی، فکر می‌کنید آیا این احتمال نسبت به قبل از مشاهدهٔ سیب لکه‌دار افزایش پیدا کرده است، یا کاهش؟ افزایش پیدا کرده است.

کار در کلاس صفحه ۶۳

فرض کنید سه صندوق سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه‌دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سیبی را از آن صندوق خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. در این صورت، احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

B_1 : سیب انتخابی از باغ شمالی

B_3 : سیب انتخابی از باغ جنوبی

B_2 : سیب انتخابی از باغ مرکزی

A : پیشامد لکه‌دار بودن سیب انتخابی

$$P(A \mid B_1) = \frac{10}{100} \qquad P(B_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \mid B_2) = \frac{3}{100} \qquad P(B_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \mid B_3) = \frac{5}{100} \qquad P(B_3) = \frac{1}{3}$$

با استفاده از قانون احتمال کل داریم :

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3) = \frac{10}{300} + \frac{3}{300} + \frac{5}{300} = 0/06$$

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{10}{100}}{0/06} = \frac{5}{9}$$

تمرین های صفحه ۶۴

۱. درباره‌ی خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست‌کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

$۲^۴ = ۱۶$

(پ،پ،د،د)(د،د،پ،پ)(پ،د،د،پ)(د،پ،پ،د)(د،پ،د،پ)

۲. ستاد مرکزی معاینه‌ی فنی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد: «امسال پرکارترین سال در عرصه‌ی معاینه‌ی فنی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینه‌ی فنی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سالهای مبارزه با آلودگی هوا بود...»

در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینه‌ی فنی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه کرده و خودروهای مردودی در معاینه‌ی فنی باشد: (تعداد به هزار دستگاه است).

شمارهٔ مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵	۸۷۰
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸	۲۵۸

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

$$\frac{۲۵۸}{۸۷۰} = \frac{۸۶}{۲۹۰} = \frac{۴۳}{۱۴۵}$$

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شماره‌ی ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

$$\frac{۲۶}{۸۷۰}$$

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شماره‌ی ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

$$\frac{۲۶}{۷۹}$$

۳. بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیره‌ی هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

اگر یک روز ساحل جزیره‌ی هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی

است=P(A)

اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد=P(B)

$$P(A_۲|A_۱) = \frac{P(A_۲ \cap A_۱)}{P(A_۱)}$$

$$P((A_۱ \cap A_۲) \cap A_۳ = P(A_۱ \cap A_۲) = P(A_۱).P(A_۲|A_۱)$$

۴. قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید:

$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|(A_۱ \cap A_۲))$

$$P(A_۳|(A_۱ \cap A_۲)) = \frac{P(A_۳ \cap (A_۱ \cap A_۲))}{P(A_۱ \cap A_۲)}$$

۵. قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبه‌ی احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل اجرا است؟

$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ \cap \ldots \cap A_n) = P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|A_۱ \cap A_۲) \ldots P(A_n|A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_{n-۱})$

۶. جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه‌ی تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامه‌ی تراکتور داشته باشد چقدراست؟

$$P(A) = ۰/۵۵ \quad P(B) = ۰/۴۵ \quad P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = ۰/۵۵x$$

۷. دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده ان را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۴}{۹} + \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۹}$$

۸. در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک راننده‌ی مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام می‌دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی، روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

$P(A \cap B) = ۰/۶ \times ۰/۰۵ + ۰/۴ \times ۰/۰۱ = ????$

۹. در دو جعبه به ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه‌ی اول ۴ لامپ و در جعبه‌ی دوم ۳ لامپ معیوب است. از هرکدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه‌ی جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

$$P(A \cap B) = \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰} + \frac{۳}{۱۲} \times \frac{۵}{۱۲}$$

۱۰. ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

$$P(A) = ۰/۵ \quad P(B) = ۰/۸ \quad P(A) = ۳(P(B)) \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{?????} =$$

۱۱. احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن زده ۰/۱ است.

$$P(A) = ۰/۰۰۲ \quad P(B) = ۰/۱$$

اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{۰/۰۰۲ \times ۰/۹}{۰/۱}$$

۱۲. قانون بیز را ثابت کنید:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

راهنمایی : در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید. تا درستی آن را ببینید.

۱۳. با فرض شرایط قانون احتمال کل، ثابت کنید:

$$\min\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\} \leq P(A) \leq max\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$$

۱۴. فرض کنید B و C دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A|B) \leq P(A|C)$. ثابت کنید:

$$P(A|B) \leq P(A|(B \cup C)) \leq P(A|C)$$

۱۵. امیر و بابک عضو تیم ده نفره‌ی والیبال مدرسه اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۲۰}$$

۱۶. علی و مازیار هر کدام به ترتیب، با احتمال های ۰/۴ و ۰/۳ برای دیدن یک مسابقه‌ی ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال ۰/۸ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

$P(A) = ۰/۴ \quad P(B) = ۰/۳ \quad P(B|A) = ۰/۸ \quad \frac{۰/۳ \times ۰/۸}{۰/۴}$

۱۷.خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه خوان‌های یک مؤسسه‌ی انتشاراتی اند که به ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی غلط تصحیح کنند به ترتیب ، ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

$P(A) = ۰/۲ \quad P(B) = ۰/۳ \quad P(h) = ۰/۵ \quad P(A|(B \cap h)) = \frac{P(A).P(B???)}{P(A)}$

۱۸. فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شماره‌ی کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۱۹. یک شرکت بیمه، بیمه گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه «کم خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه گزاران پرخطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

$۰/۳ \times ۰/۴$

ب) اگر یک بیمه گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

$P(A) = ۰/۴ \quad P(B) = ۰/۲ \quad P(A|B) = ۰/۳۰ \quad \dfrac{۰/۳ \times ۰/۴}{۰/۱}$

فصل2-درس4:پیشامد های مستقل و وابسته

فصل2-درس4

درس چهارم : پیشامدهای مستقل و وابسته

فعالیت صفحه ۶۷

یک سکه و یک تاس را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشد.

۱-فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای B ، A و $A \cap B$ را بنویسید.

$$S=\{(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),(\text{ر},۳),(\text{ر},۴),(\text{ر},۵),(\text{ر},۶),(\text{پ},۱),(\text{پ},۲)\}$$

$$A=\{(\text{ر},۶),(\text{پ},۶)\}$$

$$B=\{(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),(\text{ر},۳),(\text{ر},۴),(\text{ر},۵),(\text{ر},۶)\}$$

$$A\cap B=\{(\text{ر},۶)\}$$

۲-احتمال وقوع پیشامدهای B ، A و $A \cap B$ را تعیین کنید.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۲}\quad,\quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}\quad,\quad P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۲}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید یعنی $P(A \mid B)$ را به‌دست آورید.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۶}{۱۲}}=\frac{۱}{۶}$$

۳-با مقایسه‌ی $P(A \mid B)$ و $P(A)$ آیا وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع A داشته است؟

از اینکه هر دو احتمال با هم برابر شده‌اند وقوع پیشامد B تأثیری نداشته است.

۴-اگر $P(A \mid B) = P(A)$، چه رابطه‌ای بین $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cap B)$ برقرار است؟

$$\begin{cases}P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\\ P(A\mid B)=P(A)\end{cases}\Rightarrow P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$$

۵-در تساوی $P(A \mid B) = P(A)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $P(B \mid A) = P(B)$ را نتیجه بگیرید.

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)\times P(B)}{P(B)}=P(B)\Rightarrow P(B\mid A)=P(B)$$

کار در کلاس صفحه ۶۹

۱-سکه‌ی سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده‌ی فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$A = \{(پ,ر,پ),(ر,ر,پ),(پ,ر,ر),(ر,ر,ر)\}$ $\qquad P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

$B = \{(پ,ر,ر),(ر,ر,پ)\}$ $\qquad P(B) = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$

$A \cap B = \{(پ,ر,ر),(ر,ر,پ)\}$ $\qquad P(A \cap B) = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$

دو پیشامد مستقل نیستند زیرا :

$$\frac{۱}{۴} \neq \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

۲-در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اول و B را پیشامد مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا A و B مستقل‌اند؟

$A = \{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}$ $\qquad P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

$B = \{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$ $\qquad P(B) = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$

$A \cap B = \emptyset$ $\qquad P(A \cap B) = ۰$

A و B مستقل نیستند زیرا :

$$۰ \neq \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۱۲} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

۳-در یک مسابقه‌ی تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

A : پیشامد به هدف زدن محمد

B : پیشامد به هدف زدن مرتضی

$$P(A) = \frac{۵}{۷} \quad , \quad P(B) = \frac{۷}{۱۰} \quad , \quad A \cap B = \frac{۵}{۷} \times \frac{۷}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

کار در کلاس صفحه ۷۰

در مثال صفحه‌ی قبل، اگر مهره‌ی دوم را پس از جایگذاری مهره‌ی اول در جعبه بیرون آوریم، با محاسبه‌ی $P(B)$ و $P(B \mid A)$ ، مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید.

وقتی مهره‌ی اول را جایگذاری می‌کنیم تعداد کل مهره‌ها ۱۳ می‌شود و داریم : $P(B \mid A) = \frac{۸}{۱۳}$ از طرفی $P(B) = \frac{۸}{۱۳}$

بنابراین $P(B) = P(B \mid A)$ و این یعنی دو پیشامد مستقل هستند.

تمرین صفحه ۷۱

۱-اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

فرض می‌کنیم A و B دو پیشامد ناسازگار باشند یعنی $A \cap B = \varnothing$ بنابراین داریم :

$$(۱) \quad P(A \cap B) = ۰$$

از طرفی اگر A و B مستقل باشند داریم :

$$(۲) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

و از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت :

$$P(A) \times P(B) = ۰ \Longrightarrow P(A) = ۰ \quad \text{یا} \quad P(B) = ۰ \Longrightarrow A = \varnothing \quad \text{یا} \quad B = \varnothing$$

بنابراین برای اینکه دو پیشامد ناسازگار مستقل از یکدیگر باشند، حداقل یکی از آنها باید تهی باشد.

۲-اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل اند؟ چرا؟

خیر، زیرا اگر E و F اشتراکشان تهی باشد آنگاه E و F مستقل نیستند. به عنوان مثال :

$$S = \{۵ , ۶ , ۷ , ۸\}$$

$$\begin{cases} A = \{۵ , ۶\} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۲} \\ B = \{۵ , ۷\} \Rightarrow P(B) = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۴} \ , \ \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

حال زیر مجموعه‌های دو مجموعه‌ی A و B را در نظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} P(E) = \frac{۱}{۴} \\ P(F) = \frac{۱}{۴} \end{cases} , \ E \cap F = \varnothing \Rightarrow P(E \cap F) = ۰ \Rightarrow P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

پس نتیجه خواهیم گرفت که E و F مستقل نیستند.

۳-اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر مستقل‌اند.

الف) A' و B

باید نشان دهیم : $P(B \cap A') = P(B) \times P(A')$

$$P(B \cap A') = P(A - B) = P(B) - P(B \cap A) \xRightarrow{\text{با توجه به مستقل بودن } A \text{ و } B} = P(B) - P(A) \times P(B)$$
$$= P(B)\big(1 - P(A)\big) = P(B) \times P(A')$$

ب) A' و B'

راه حل اول :

$$P(A' \cap B') = P(A' - B) = P(A') - P(A' \cap B) \xRightarrow{\text{با توجه به قسمت الف}} P(A') - P(A') \times P(B)$$
$$= P(A')\big(1 - P(B)\big) = P(A') \times P(B')$$

راه حل دوم : بدون استفاده از قسمت الف

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \underbrace{1 - P(A)}_{P(A')} - P(B) + P(A \cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{با توجه به مستقل بودن } A \text{ و } B} = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = P(A') - P(B)(1 - P(A)$$
$$= P(A') - P(B) \times P(A') = P(A')\big(1 - P(B)\big) = P(A') \times P(B')$$

۴-در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهرشدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن A و B رابررسی کنید.

$A = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶),(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴),(۶,۵)\}$

$B = \{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}$ ، $P(A \cap B) = \{(۳,۲),(۳,۴)\}$

$$\begin{cases} P(A) = \dfrac{۱۰}{۳۶} \\ P(B) = \dfrac{۶}{۳۶} \\ P(A \cap B) = \dfrac{۲}{۳۶} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{۱۰}{۳۶} \times \frac{۶}{۳۶} \neq \frac{۲}{۳۶} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

۵-از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$$\begin{cases} A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow P(A) = \dfrac{5}{10} \\ B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow P(B) = \dfrac{3}{10} \\ P(A \cap B) = \{6\} \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{10} \neq \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

A و B مستقل نیستند.

۶-احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار ۰/۶ و روی بیمار دیگر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه :

پیشامد موفقیت‌آمیز بودن پیوند کلیه روی بیمار اول را A و پیشامد موفقیت‌آمیز بودن پیوند کلیه روی بیمار دوم را B در نظر می‌گیریم. بنابراین با توجه به مستقل بودن این دو پیشامد داریم :

$$P(A) = 0.6 \quad , \quad P(B) = 0.8$$

الف) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.8 = 0.48$$

ب) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

با توجه به این که هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، متمم آنها نیز مستقلند. داریم :

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$
$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.8 = 0.2$$
$$P(A' \cap B') = P\left(A'\right) \times P\left(B'\right) = 0.4 \times 0.2 = 0.08$$

پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، هر کدام از آنها مستقل از متمم دیگری است. بنابراین :

$$\begin{cases} P(A') = 0.4 \\ P(B) = 0.8 \end{cases} \Rightarrow P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) = 0.4 \times 0.8 = 0.32$$

۷-یک سکه و دو تاس به‌طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

روش اول :

$$n(S) = 2 \times 6 \times 6 = 72 \quad , \quad A = \left\{\left(\text{ر}, 6, 6\right)\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{72}$$

روش دوم :

اگر A را پیشامد رو آمدن سکه و B را پیشامد ۶ آمدن دو تاس در نظر بگیریم این دو پیشامد از هم مستقل هستند. بنابراین داریم :

$$\begin{cases} P(A)=\frac{1}{2} \\ P(B)=\frac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{72}$$

۸-در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سوال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سوالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به‌دست آورید که :

الف) به تمام سوال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

با توجه به اینکه پیشامدهای پاسخ دادن به هر سوال مستقل از سوال‌های دیگر است، داریم :

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{5}\right)^{10}=\frac{1}{5^{10}}$$

ب) تنها به پنج سوال اول پاسخ صحیح داده باشد.

برای پنج سوال اول که پاسخ صحیح داده باشد، داریم: $\left(\frac{1}{5}\right)^{5}=\frac{1}{5^{5}}$

و برای پنج سوال دوم داریم: $\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$

$$\frac{1}{5^{5}}\times\frac{4^{5}}{5^{5}}=\frac{4^{5}}{5^{10}}=\frac{(2^{2})^{5}}{5^{10}}=\frac{2^{10}}{5^{10}}=(0/4)^{10}$$

پ) به نیمی از سوال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

در اینجا انتخاب پنج سوال از بین ده سوال را داریم و با توجه به قسمت ب داریم : $\binom{5}{10}\times(0/4)^{10}$

۹-در یک جعبه که شامل ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۱ مهره‌ی زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر دو مهره قرمز باشند.

دو پیشامد قرمز بودن مهره اول و مهره دوم مستقل از یکدیگرند و احتمال قرمز بودن هر مهره برابر است با $\frac{3}{6}$ بنابراین داریم :

$$\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

احتمال اینکه حداقل یک مهره آبی باشد، متمم احتمال این است که هیچکدام آبی نباشد :

احتمال اینکه هیچکدام آبی نباشد : $\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{16}{36}$

احتمال حداقل یک مهره آبی : $1-\frac{16}{36}=\frac{5}{9}$

پ) هر دو مهره همرنگ باشند.

هر دو مهره همرنگ باشند یعنی یا هردو قرمز باشند و یا هر دو آبی باشند.

$$\begin{cases}\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{9}{36} & \text{احتمال قرمز بودن هر دو مهره}\\ \frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36} & \text{احتمال آبی بودن هر دو مهره}\end{cases}\Longrightarrow$$

احتمال همرنگ بودن هر دو مهره : $\frac{9}{36}+\frac{4}{36}=\frac{13}{36}$

۱۰-جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به‌دست آورید که :

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

این سه پیشامد از یکدیگر مستقلند. بنابراین :

$$\begin{cases}\text{احتمال معیوب بودن لامپ اول}=\frac{3}{12}\\ \text{احتمال معیوب بودن لامپ دوم}=\frac{2}{11}\\ \text{احتمال معیوب بودن لامپ سوم}=\frac{1}{10}\end{cases}\Longrightarrow\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{220}$$

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

احتمال اینکه تمام لامپ‌ها سالم باشند را به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{9}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{55}$$

و با استفاده از احتمال متمم داریم :

احتمال اینکه حداقل یک لامپ معیوب باشد : $1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$

۱۱-احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همه‌ی افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

احتمال عدم موفقیت دارو برای هر شخص : $1-0/9=0/1$

افراد از یکدیگر مستقل هستند، بنابراین :

$$0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1=(0/1)^{10}$$

۱۲-اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری که $P(A\cap B)=0/1$ و $P(A\cap B')=0/4$، حاصل $P(A\cup B')$ را به‌دست آورید.

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Longrightarrow 0/4=P(A)-0/1\Longrightarrow P(A)=0/5$$

با توجه به مستقل بودن A و B: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$۰/۱ = ۰/۵ \times P(B) \Rightarrow P(B) = ۰/۲ \Rightarrow P(B') = ۱ - ۰/۲ = ۰/۸$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \Rightarrow P(A \cup B') = ۰/۵ + ۰/۸ - ۰/۴ = ۰/۹$$

فصل3-درس1:توصیف و نمایش داده ها

فصل3-درس1

درس اول : توصیف و نمایش داده‌ها

فعالیت صفحه ۷۴

یک راننده تاکسی در یک روز، اسکناس‌های زیر را از مسافران دریافت می‌کند. او تصمیم دارد این اسکناس‌ها را در کیف خود دسته‌بندی کند. برای انجام این دسته‌بندی، می‌خواهد مراحل زیر را انجام دهد. شما او را کمک کنید تا این کار را انجام دهد.

۱-ابتدا به هر نوع اسکناس عدد ۱ تا ۴ را بدهید و در ستون شماره وارد کنید.

۲-سپس به شمارش اسکناس‌ها بپردازید و تعداد تکرار هر اسکناس را در ستون سوم وارد کنید.

۳-در ادامه تعداد هر اسکناس را بر تعداد کل اسکناس‌ها تقسیم کنید و آن را در ستون چهارم قرار دهید.

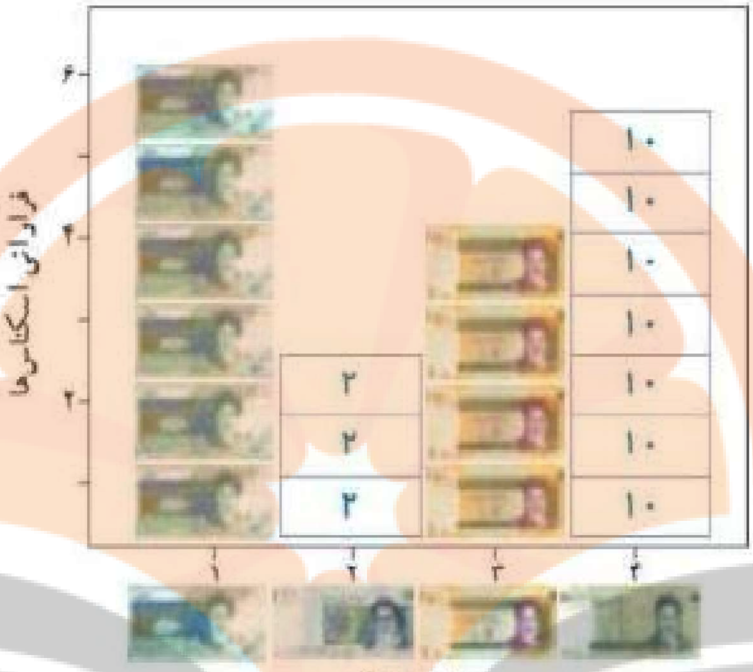
۴-با توجه به اعداد موجود در جدول زیر، چند درصد اسکناس‌ها ۱۰ هزار تومانی، چند درصد ۱۰۰۰ تومانی، چند درصد ۵ هزار تومانی و چند درصد از اسکناس‌ها ۱۰ هزار تومانی است؟

انواع اسکناس‌ها	شماره	فراوانی یا تعداد هر اسکناس	$\frac{\text{فراوانی یا تعداد تکرار هر اسکناس}}{\text{تعداد کل اسکناس‌ها}}$
۱۰۰۰ تومانی	۱	۶	$\frac{\text{۶}}{\text{۲۰}}$ = ۰/۳۰
۲ هزار تومانی	۲	۳	۰/۱۵
۵ هزار تومانی	۳	۴	۰/۲۰
۱۰ هزار تومانی	۴	۷	۰/۳۵
تعداد کل اسکناس‌ها		۲۰	۱

حال می‌خواهیم جدول بالا را به صورت سه نمودار الف، ب و پ نشان دهیم.

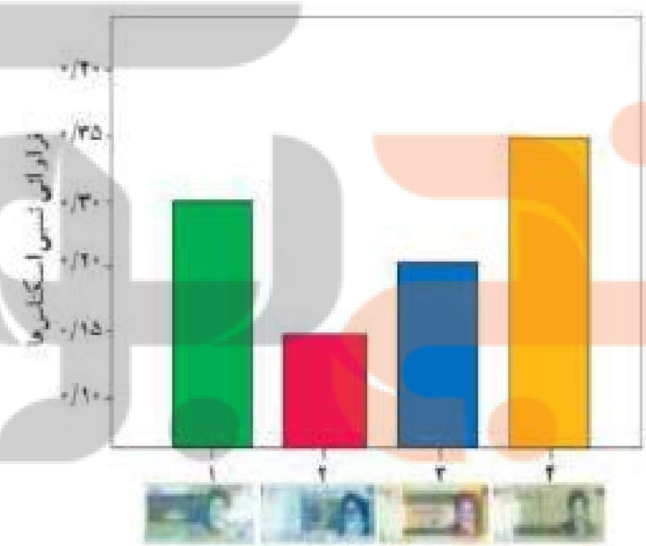
۱-در نمودار الف، ابتدا دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهنده‌ی تعداد تکرار اسکناس‌ها، یا فراوانی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهنده‌ی نوع اسکناس‌ها باشد. در این نمودار، اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار

تومانی روی هم قرار گرفته‌اند. شما هم اسکناس‌های ۲ هزار تومانی را به صورت $\boxed{۲}$ و اسکناس‌های ۱۰ هزار تومانی را به صورت $\boxed{۱۰}$ در نمودار قرار داده و آن را کامل کنید.



نمودار الف

۲-در نمودار ب، نیز دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهنده‌ی نسبت تکرار اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهنده‌ی نوع اسکناس‌ها است. با رسم مستطیل‌هایی برای فراوانی نسبی اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار تومانی نمودار شکل ب را کامل کنید.

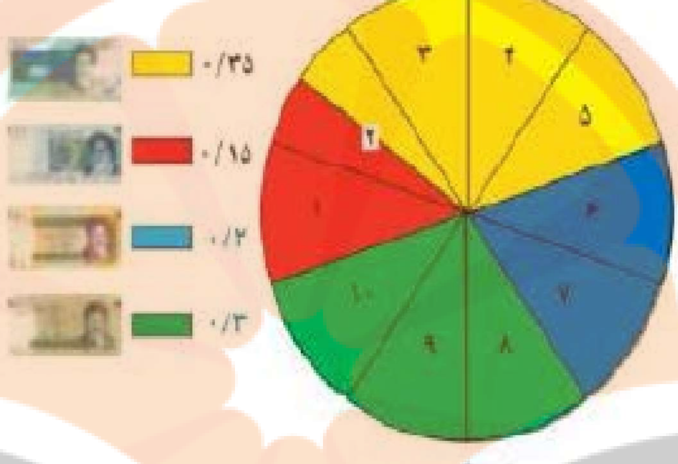


نمودار ب

۳-اگر راننده تاکسی بخواهد وضعیت تعداد اسکناس‌های خود را در یک هفته پیش‌بینی کند، کدام نمودار الف یا ب می‌تواند به او کمک کند؟ هر دو نمودار مناسب است ولی نمودار ب بهتر است.

۴-برای رسم نمودار دایره‌ای ابتدا دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشان‌دهنده‌ی ۱۰ درصد کل دایره است. سپس با استفاده از عدد مربوط به نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی

مربوط به اسکناس ۱۰ هزار تومانی در ستون چهارم، قسمت اول دایره و نصف قسمت دوم دایره قرمز رنگ شده است که معادل ۱۵ درصد کل دایره است و به طور مشابه برای اسکناس ۲ هزار تومانی سه قسمت دایره به‌علاوه نصف قسمت دوم رنگ زرد می شود که معادل ۳۵ درصد کل دایره است. برای اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار تومانی دایره را رنگ آبی و سبز کنید.



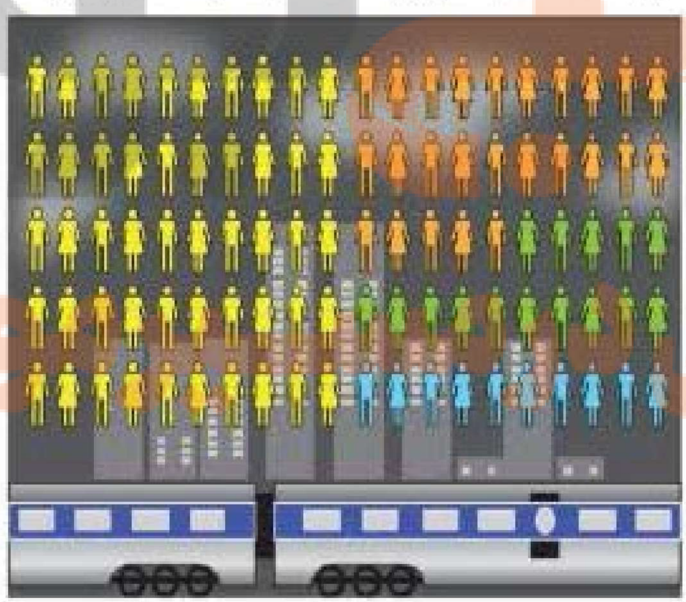
نمودار پ

کار در کلاس صفحه ۷۶

در مورد اینکه مسافران یک قطار در طول سفر چگونه از وقت خود استفاده می‌کنند، تحقیقی صورت گرفته است و نتایج زیر به‌دست آمده است.

در شکل ت، مسافران یک قطار به عنوان متغیر گسسته را ملاحظه می‌کنید.

- افرادی که با رنگ زرد مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار استراحت می‌کنند.
- افرادی که با رنگ نارنجی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار با تلفن همراه خود بازی می‌کنند.
- افرادی که با رنگ سبز مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار مطالعه می‌کنند.
- افرادی که با رنگ آبی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار غذا می‌خورند.

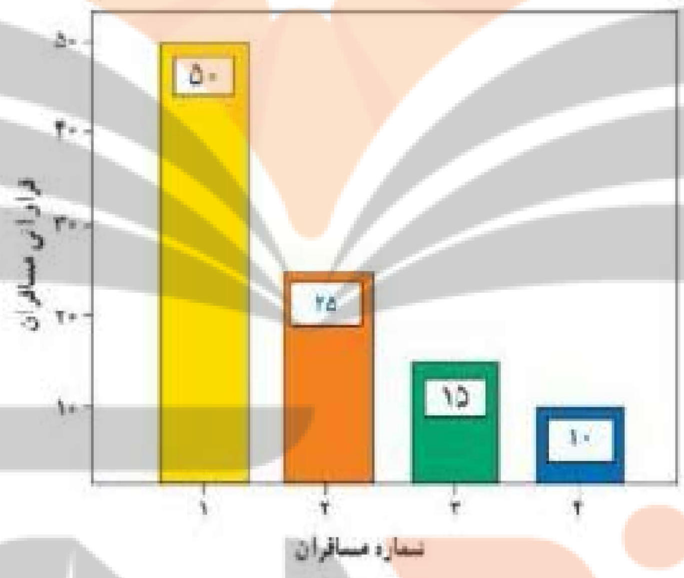


شکل ت

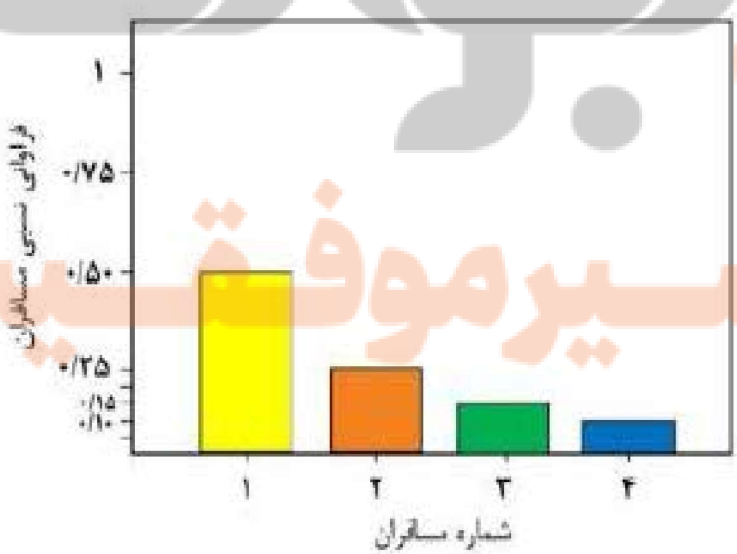
جدول فراوانی مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

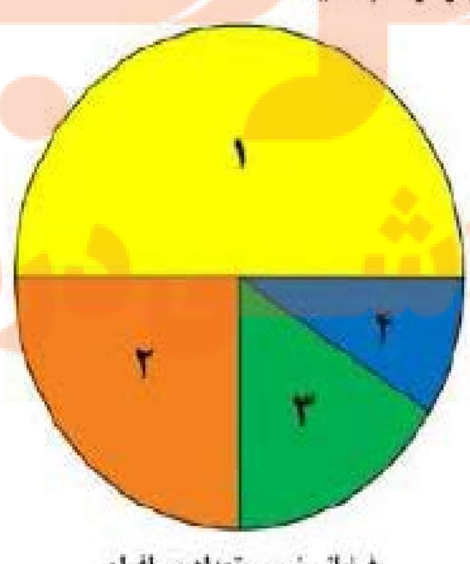
مسافران قطار	شماره مسافران	فراوانی مسافران	فراوانی نسبی مسافران
مسافرانی که استراحت می‌کنند	۱	۵۰	۰/۵۰
مسافرانی که با تلفن همراه خود بازی می‌کنند	۲	۲۵	۰/۲۵
مسافرانی که مطالعه می‌کنند	۳	۱۵	۰/۱۵
مسافرانی که غذا می‌خورند	۴	۱۰	۰/۱۰
تعداد کل مسافران		۱۰۰	۱

همچنین نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.



فراوانی نسبی تعداد مسافران را براساس جدول کامل شده رسم کنید. نمودار دایره‌ای مربوط به فراوانی نسبی تعداد مسافران را رسم کنید.





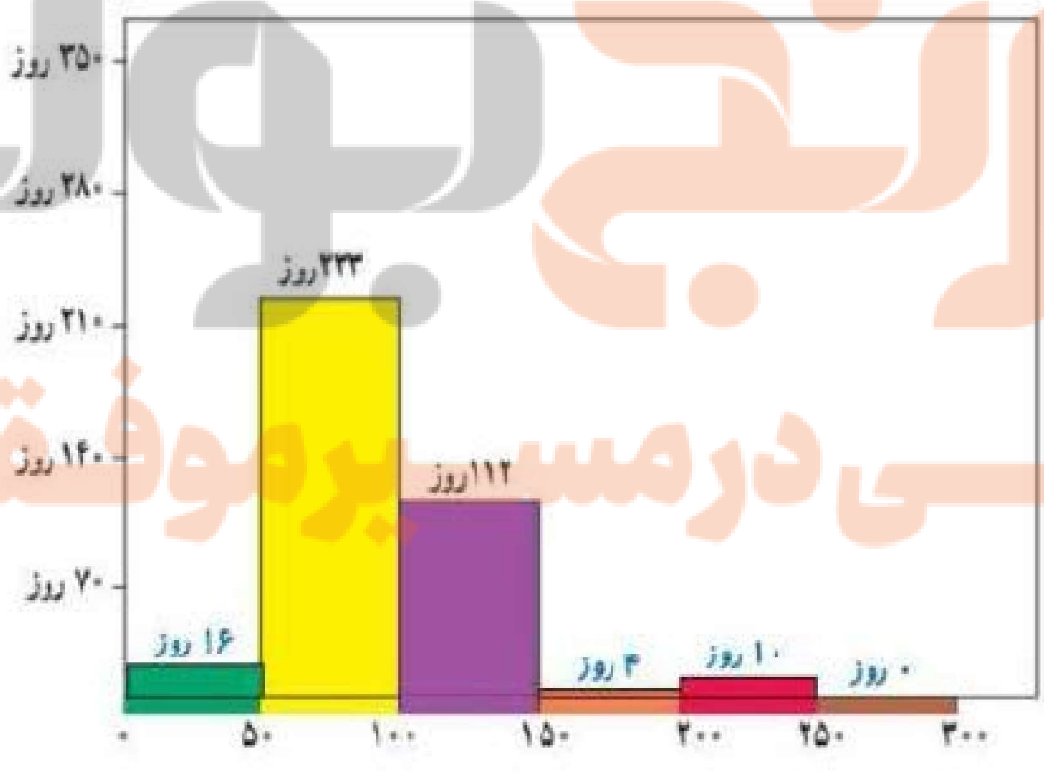
فراوانی نسبی تعداد مسافران

فعالیت صفحه ۷۸

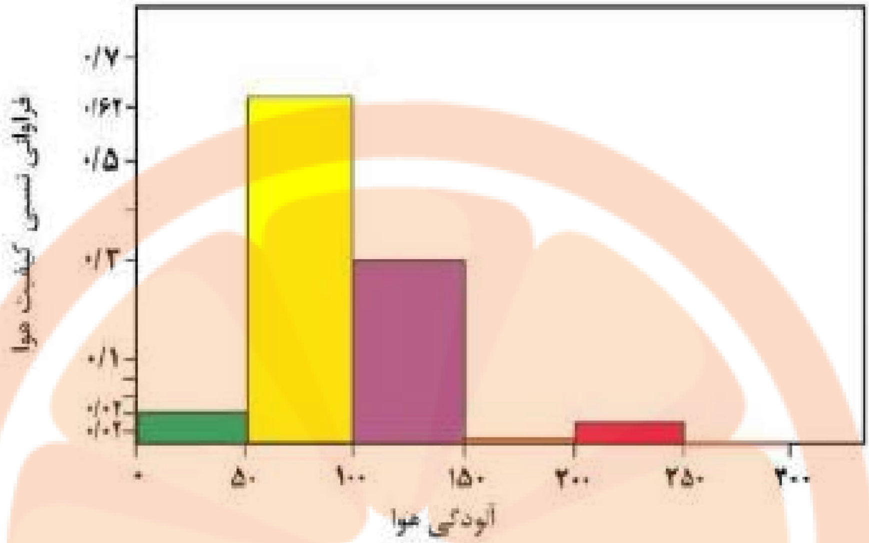
سال‌هاست با مسئله‌ی آلودگی هوا آشنا هستیم و این مسئله به یکی از دغدغه‌های مهم تبدیل شده است.
اطلاعات و داده‌های مربوط به شاخص آلودگی هوا در سایت شرکت کنترل کیفیت هوا قابل دسترسی است. میزان شاخص کیفیت هوا در شهر تهران برای تمام روزهای سال ۱۳۹۳ در جدول زیر گزارش شده است. این جدول را کامل کنید:

وضعیت هوا	شاخص کیفیت هوا	فراوانی	فراوانی نسبی
پاک	$۰ \leq AQI \leq ۵۰$	۱۶	۰/۰۴
سالم	$۵۰ < AQI \leq ۱۰۰$	۲۳۳	۰/۶۲
ناسالم برای گروه‌های حساس	$۱۰۰ < AQI \leq ۱۵۰$	۱۱۲	۰/۳
ناسالم	$۱۵۰ < AQI \leq ۲۰۰$	۴	۰/۰۱
بسیار ناسالم	$۲۰۰ < AQI \leq ۲۵۰$	۱۰	۰/۰۳
خطرناک	$۲۵۰ < AQI \leq ۳۰۰$	۰	۰
تعداد کل روزهای یک سال		۳۶۵	۱

نمودار مربوط به فراوانی تعداد روزها براساس وضعیت آلودگی هوا را کامل کنید؟



- نمودار فراوانی نسبی تعداد روزها را براساس وضعیت آلودگی هوا رسم کنید.



- چند درصد از روزهای سال، هوا سالم بوده است؟

۰/۶۲ × ۱۰۰ = ۶۲ %

- چند درصد روزهای سال، هوا ناسالم و بسیار ناسالم بوده است؟

(۰/۰۱ + ۰/۰۳) × ۱۰۰ = ۴ %

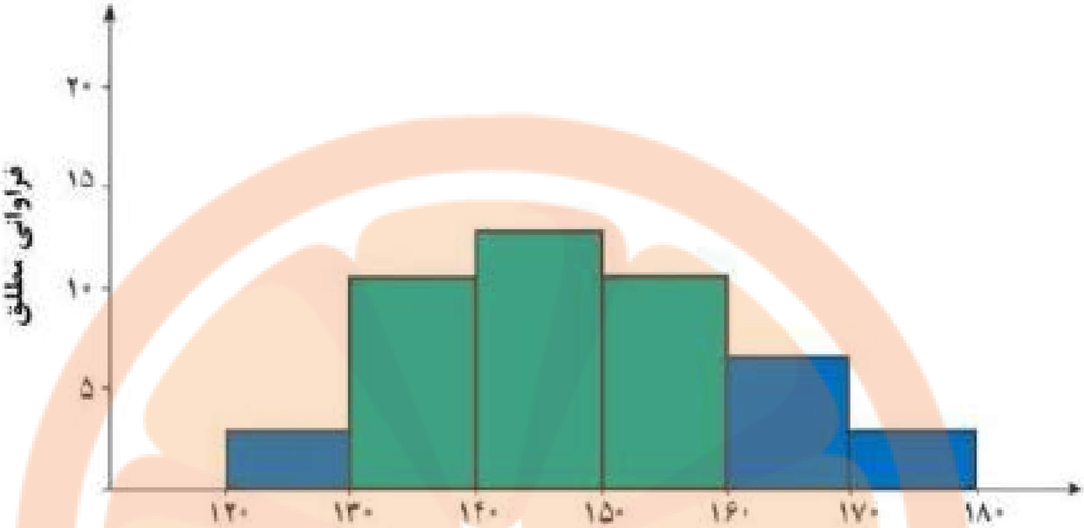
- کدام نمودار، در پاسخ دادن به سؤالات، ما را بهتر راهنمایی می‌کند؟ نمودار فراوانی نسبی

کار در کلاس صفحه ۸۰

جدول فراوانی زیر مربوط به قد (H) ۵۰ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم است. جاهای خالی جدول زیر را کامل کنید.

قد دانش‌آموزان	فراوانی	فراوانی نسبی
۱۲۰ ≤ H < ۱۳۰	۳	۰/۰۶
۱۳۰ ≤ H < ۱۴۰	۱۰	۰/۲۰
۱۴۰ ≤ H < ۱۵۰	۱۳	۰/۲۶
۱۵۰ ≤ H < ۱۶۰	۱۱	۰/۲۲
۱۶۰ ≤ H < ۱۷۰	۱۰	۰/۲۰
۱۷۰ ≤ H < ۱۸۰	۳	۰/۰۶
مجموع	۵۰	۱

براساس اعداد جدول، نمودارهای بافت نگاشت مربوط به فراوانی مطلق قد دانش‌آموزان را کامل کنید.



قد چند درصد از دانش‌آموزان بین ۱۶۰ تا ۱۷۰ سانتی‌متر است؟ ۲۰٪

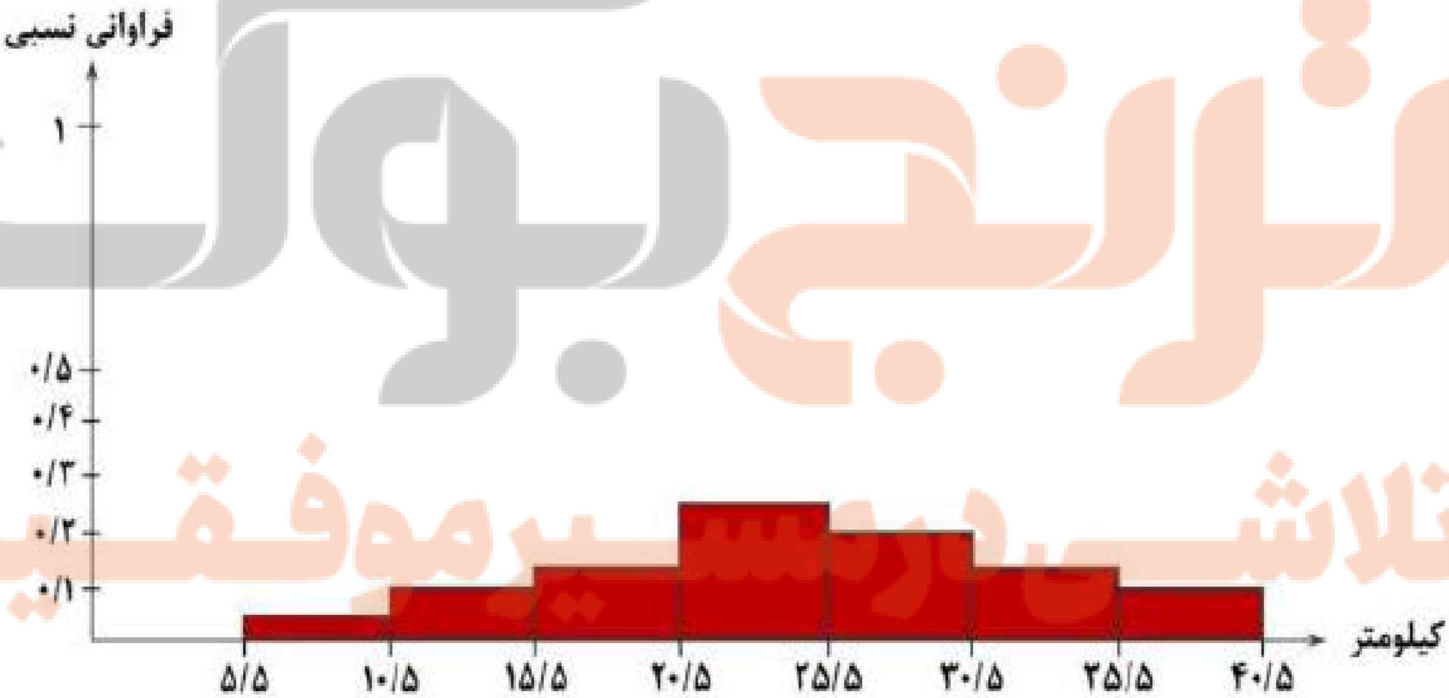
همچنین قد چند درصد از دانش‌آموزان بین ۱۲۰ تا ۱۴۰ سانتی‌متر است؟

۰/۰۶ + ۰/۲۰ = ۰/۲۶٪

تمرین صفحه ۸۱

۱-داده‌های زیر، مسافتی را که ۲۰ راننده از مکان‌های مختلف برای رسیدن به مقصد A طی می‌کنند نشان می‌دهد. این داده‌ها، در جدول زیر گردآوری شده است. جدول را کامل کرده و نمودار بافت نگاشت مربوطه را رسم کنید.

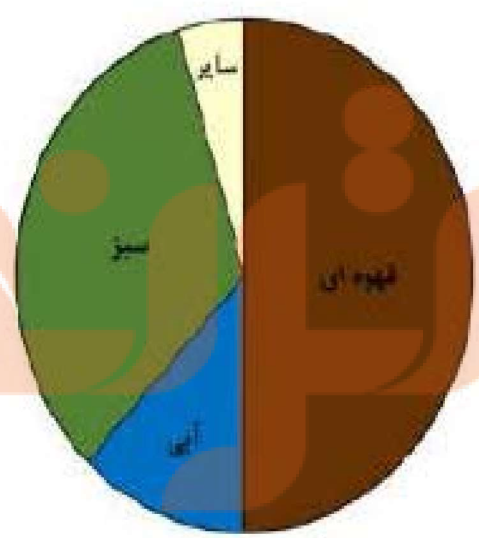
کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است	فراوانی	فراوانی نسبی
از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر	۱	۰/۰۵
از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر	۲	۰/۱۰
از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر	۳	۰/۱۵
از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر	۵	۰/۲۵
از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر	۴	۰/۲۰
از ۳۰/۵ کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر	۳	۰/۱۵
از ۳۵/۵ کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر	۲	۰/۱۰
مجموع	۲۰	۱

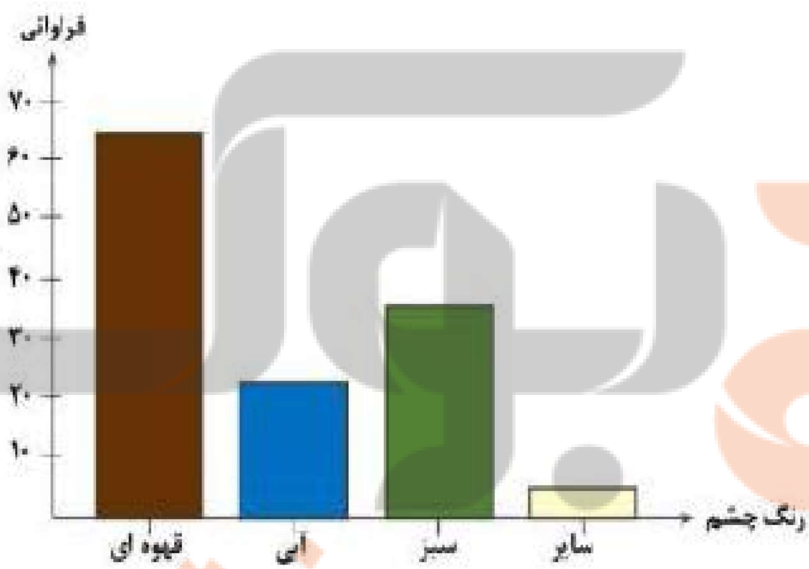


۲-رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است : ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودار را رسم کنید.

نمودار میله‌ای ☐ نمودار دایره‌ای ☐ هر دو ■

رنگ چشم افراد	فراوانی	فراوانی نسبی
قهوه‌ای	۶۴	$\frac{۶۴}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۱۸۰$
آبی	۲۳	$\frac{۲۳}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۶۴/۷$
سبز	۳۶	$\frac{۳۶}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۱۰۱/۲$
سایر	۵	$\frac{۵}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۱۴/۱$
مجموع	۱۲۸	۳۶۰





۳-جملات زیر را کامل کنید :

الف)برای متغیرهای پیوسته از نمودار بافت‌نگار استفاده می‌شود.

ب)برای متغیرهای گسسته از نمودارهای دایره‌ای و میله‌ای استفاده می‌شود.

پ)برای متغیرهای کیفی از نمودارهای دایره‌ای و میله‌ای استفاده می‌شود.

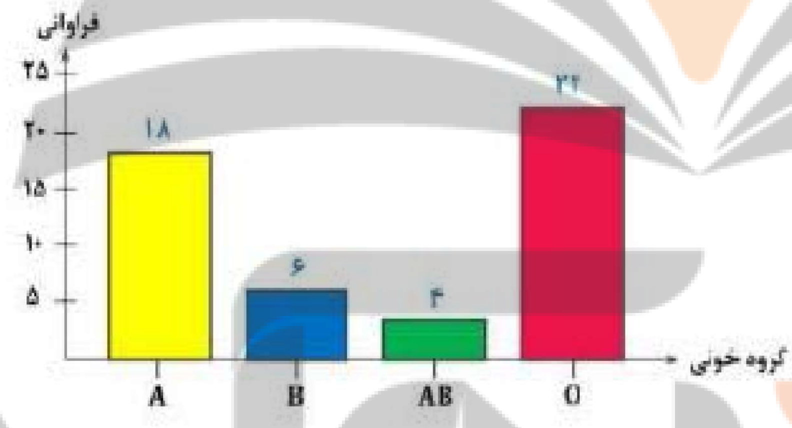
۴-گروه خونی ۵۰ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم به صورت زیر گردآوری شده‌اند :

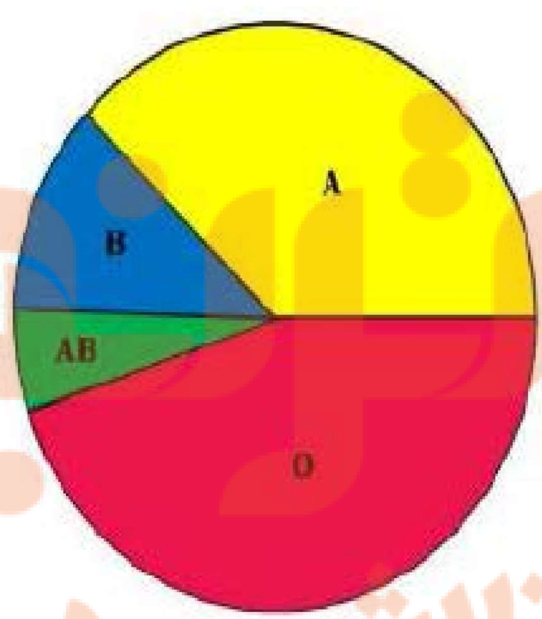
الف)جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد را رسم کنید.

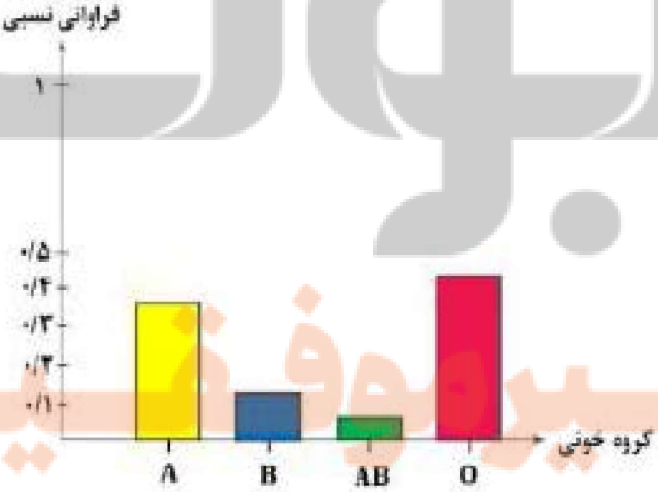
O	O	A	A	O
B	O	B	A	O
AB	B	A	B	AB
O	O	A	A	O
AB	O	A	B	A
O	A	A	O	A
O	A	O	AB	A
O	B	A	A	O
O	O	O	A	O
O	A	O	A	O

گروه خونی	فراوانی	فراوانی نسبی
A	۱۸	۰/۳۶
B	۶	۰/۱۲
O	۲۲	۰/۴۴
AB	۴	۰/۰۸
مجموع	۵۰	۱

ب)نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی و همچنین نمودار دایره‌ای مربوط به این افراد را رسم کنید.







پ)چند درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند؟

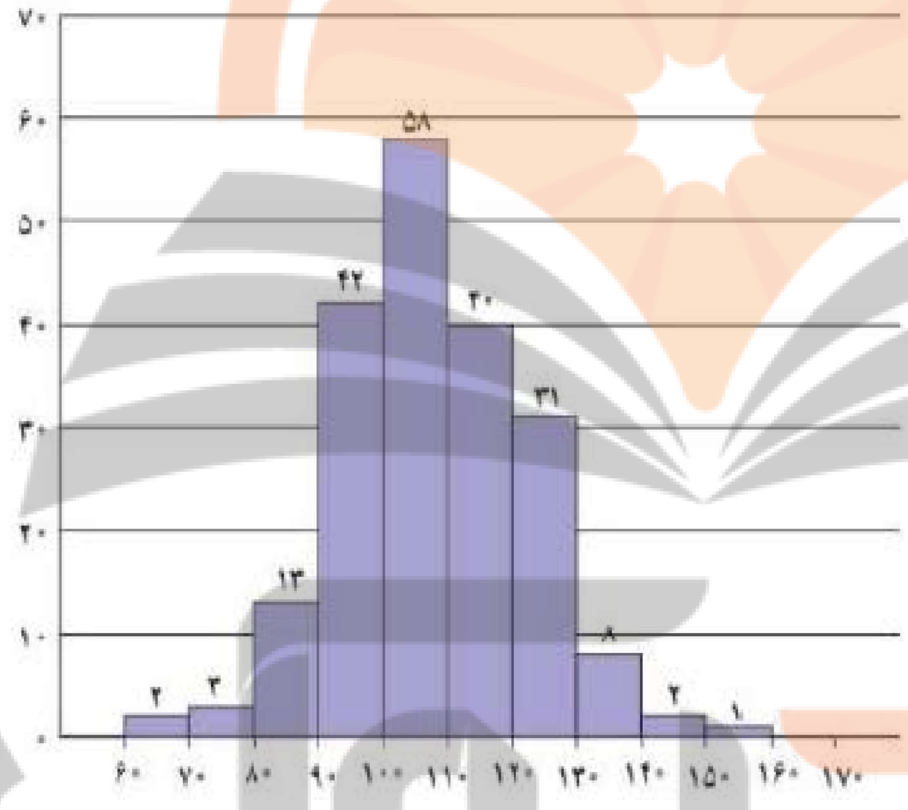
$۰/۴۴ \times ۱۰۰ = ۴۴\%$

۵-اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O، ۰/۴ باشد و مجموع فراوانی‌های همه‌ی گروه‌های خونی برابر ۲۰ در نظر گرفته شود. فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟

$$f_O = ۰/۴ \Rightarrow \frac{F_O}{۲۰} = ۰/۴ \Rightarrow F_O = ۸$$

۶-نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهد کودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

نمرات IQ	فراوانی
۷۰-۶۰	۲
۸۰-۷۰	۳
۹۰-۸۰	۱۳
۱۰۰-۹۰	۴۲
۱۱۰-۱۰۰	۵۸
۱۲۰-۱۱۰	۴۰
۱۳۰-۱۲۰	۳۱
۱۴۰-۱۳۰	۸
۱۵۰-۱۴۰	۲
۱۶۰-۱۵۰	۱
مجموع	۲۰۰



الف)تعداد کل کودکان که نمره‌ی IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

$$۲ + ۳ + ۱۳ + ۴۲ + ۵۸ + ۴۰ + ۳۱ + ۸ + ۲ + ۱ = ۲۰۰$$

ب)نمره‌ی IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

$۱۰۰ \leq IQ$ بیشترین نمره‌ی ≤ ۱۱۰

$۱۵۰ \leq IQ$ کمترین نمره‌ی ≤ ۱۶۰

پ)چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ هستند؟

$$۲ + ۱ = ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۱/۵ \ \%$$

۷-جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف بیت شعر زیر را به‌دست آورید.

کیست این پنهان مرا در جان و تن   کز زبان من همـــی گـــوید سخن

حرف	فراوانی	فراوانی نسبی	حرف	فراوانی	فراوانی نسبی
ک	۲	۰/۰۵	م	۳	۰/۰۸
ی	۴	۰/۱۰	ر	۲	۰/۰۵
س	۲	۰/۰۵	د	۲	۰/۰۵
ت	۲	۰/۰۵	ج	۱	۰/۰۲
ا	۵	۰/۱۲	و	۲	۰/۰۵
ن	۸	۰/۲۰	ز	۲	۰/۰۵
پ	۱	۰/۰۲	ب	۱	۰/۰۲
ه	۲	۰/۰۵	گ	۱	۰/۰۲
مجموع	۴۱	۱			

فصل3-درس2:معیار های گرایش به مرکز

فصل3-درس2

درس دوم : معیارهای گرایش به مرکز

الف)میانگین داده‌ها

فعالیت صفحه ۸۴

در یک باغ، برای تعیین میزان محصولات گردو، چهار نوع درخت گردو وجود دارد که میزان محصولات انواع گردوها برحسب تعداد به شرح زیر است:

نوع گردو	گردوی نوع اول	گردوی نوع دوم	گردوی نوع سوم	گردوی نوع چهارم
میزان محصول گردو (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰۰	۱۰۰۰

الف)میانگین تعداد گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت چه تعداد است؟

$$\bar{x} = \frac{۵۰۰۰ + ۲۵۰۰ + ۳۵۰۰۰ + ۱۰۰۰}{۴} = ۱۰۸۷۵$$

حال اگر علاوه بر داشتن اطلاعات میزان تولید گردو برای هر نوع درخت گردو، تعداد درخت‌های باغ مطابق جدول زیر مشخص شده باشند :

نوع گردو	گردوی نوع اول	گردوی نوع دوم	گردوی نوع سوم	گردوی نوع چهارم
میزان محصول گردو (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰۰	۱۰۰۰
تعداد درخت‌ها	۱۰	۵	۷	۳

ب)آیا می‌توان میانگین تعداد گردوی تولید شده در قسمت (الف) را در این حالت به عنوان میانگین تولید شده برای این چهار نوع درخت گردو در نظر گرفت؟ خیر

پ)میانگین گردوی تولید شده در این حالت، به چه صورت است؟

$$\bar{x} = \frac{(۱۰ \times ۵۰۰۰) + (۵ \times ۲۵۰۰) + (۷ \times ۳۵۰۰۰) + (۳ \times ۱۰۰۰)}{۱۰ + ۵ + ۷ + ۳} = \frac{۳۱۰۵۰۰}{۲۵} = ۱۲۴۲۰$$

کار در کلاس صفحه ۸۵

دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه‌ی کارنامه‌ی آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۷۱	۶۵	۸۰	۵۲	۹۵	۱۰۰
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

الف)متوسط درصد مواد امتحانی این دانش‌آموز بدون احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟

$$\bar{x} = \frac{۷۱ + ۶۵ + ۸۰ + ۵۲ + ۹۵ + ۱۰۰}{۶} = \frac{۴۶۳}{۶} = ۷۷/۱۷$$

ب)متوسط درصد مواد امتحانی این دانش‌آموز با احتساب ضرایب مواد امتحانی را کامل کنید.

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{۶} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{۶} w_i} = \frac{(۴ \times ۷۱) + (۳ \times ۶۵) + (۱ \times ۸۰) + (۱ \times ۵۲) + (۴ \times ۹۵) + (۳ \times ۱۰)}{۴ + ۳ + ۱ + ۱ + ۴ + ۳}$$

$$\bar{x}_w = \frac{۱۲۹۱}{۱۶} = ۵۰/۶۹$$

ب) میانه داده‌ها

کار در کلاس صفحه ۸۷

در یک شعبه بانک تراکنش‌های مالی بسیاری در یک روز انجام می‌گردد. یک تراکنش مالی ممکن است انتقال مبلغی از حساب پس‌انداز یک مشتری به حساب جاری مشتری دیگری در یک بانک باشد. این تراکنش را می‌توان به دو عملیات تقسیم کرد: بدهکار کردن حساب پس‌انداز یک مشتری به اندازه‌ی مبلغ موردنظر و طلبکار کردن حساب جاری مشتری دیگر به اندازه‌ی همان مبلغ است.

الف) فرض کنید تراکنش‌های مالی در بازه‌ی زمانی ۸ تا ۹ صبح یک شعبه‌ی بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود. میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

۲۵   ۱۲   ۱۰   ۸/۷   ۱۰

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۲۵ و ۱۲ و ۱۰ و ۱۰ و ۸/۷

چون تعداد آنها فرد است، عدد وسط میانه می‌باشد. $Q_2 = ۱۰$

چارک اول $Q_1 = ۱۰$ چارک سوم $Q_3 = ۱۲$

ب) حال فرض کنید تراکنش‌های مالی دیگری در بازه‌ی زمانی ۹ تا ۱۰ صبح در همان شعبه بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود. در این حالت نیز میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

۳۴   ۳۲   ۲۰   ۸۱/۷   ۳۰   ۷۰

همانند حالت قبل ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۸۱/۷ و ۷۰ و ۳۴ و ۳۲ و ۳۰ و ۲۰

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه از میانگین دو عدد وسط به‌دست می‌آید:

$$Q_2 = \frac{۳۲ + ۳۴}{۲} = ۳۳$$

چارک اول $Q_1 = ۳۰$ چارک سوم $Q_3 = ۷۰$

پ)مد یا نما داده‌ها

فعالیت صفحه ۸۸

به تصاویر روبه‌رو توجه کنید. در شکل (الف)، (ب) و (پ) یک سری از حالت‌های صورتک را مشاهده می‌کنید.
تعداد این حالت‌ها را در شکل (الف)، (ب) و (پ) در جدول زیر کامل کنید.

شماره صورتک‌ها	انواع صورتک‌ها	شکل الف	شکل ب	شکل پ
۱		۴	۲	۴
۲		۱	۲	۱
۳		۱	۲	۲
۴		۲	۲	۲
۵		۲	۲	۴
۶		۱	۲	۱

- در شکل الف کدام صورتک بیشتر از همه تکرار شده است؟ صورتک ۱
- در شکل ب کدام صورتک بیشتر از همه تکرار شده است؟ همه‌ی صورتک‌ها به یک اندازه تکرار شده‌اند.
- در شکل پ کدام صورتک بیشتر از همه تکرار شده است؟ صورتک‌های ۱ و ۵

کار در کلاس صفحه ۸۸

در مسابقه‌ی پرتاب دارت، سه نفر شرکت کرده‌اند. براساس ۱۰ پرتابی که آنها انجام داده‌اند، امتیازهای زیر به‌دست آمده است :

- مد نفر اول چه عددی است؟ ۹ و ۱۰
- مد نفر دوم چه عددی است؟ مد ندارد.
- مد نفر سوم چه عددی است؟ ۹

نفر اول	۱۰	۹	۱۰	۷	۵	۹	۱۰	۹	۸	۸
نفر دوم	۱۰	۹	۸	۶	۱	۲	۳	۵	۴	۷
نفر سوم	۹	۹	۹	۷	۱۰	۱۰	۹	۵	۴	۷

کار در کلاس صفحه ۸۹

دو کارخانه‌ی تولید لامپ را در نظر بگیرید. کارخانه‌ی (الف) لامپ‌های کم‌مصرف و کارخانه‌ی (ب)، لامپ‌های پرمصرف تولید می‌کند. مدیر این دو کارخانه می‌خواهد در مورد طول عمر لامپ‌های تولیدی کارخانه‌هایشان تحقیق انجام بدهد.

براساس داده‌های سال‌های گذشته در کارخانه‌ی (الف) و (ب)، طول عمر پنج لامپ بر حسب ماه ثبت شده است و نتایج را به صورت زیر جمع‌آوری می‌نماید.

لامپ انتخاب شده	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه‌ی (الف)	۱۷	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه‌ی (ب)	۰	۱۵	۰	۱۶	۱۳

- آیا میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه‌ی (الف)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ های تولید شده کارخانه‌ی (الف) است؟ بله
- به دلیل وجود لامپ‌های تولید شده با طول عمر صفر در کارخانه‌ی (ب) آیا باز هم میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه‌ی (ب)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده است؟ چه معیار گرایش به مرکزی مناسب است؟ خیر، میانه
- مدیر کارخانه براساس فروش گذشته، متوجه شده است که لامپ‌های کم‌مصرف با نور سفید در منازل مردم رایج شده است. اگر او بخواهد برای امسال لامپ‌های کم‌مصرف تولید کند، کدام معیار گرایش به مرکز، برای تعداد این لامپ‌های تولیدی به او کمک می‌کند؟ خیر، مد

تمرین صفحه ۹۰

۱-تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۳، ۴۲، ۴۵، ۴۴، ۴۵، ۴۸ است. میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{۴۸ + ۴۵ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۲ + ۴۳}{۶} = \frac{۳۶۷}{۶} = ۴۴/۵$$

۲-بالاترین دما در هر یک از روزهای هفته گذشته اندازه گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است. معدل یا میانگین دما در هفته‌ی گذشته چه عددی است؟

۵۵ ، ۲۷ ، ۲۹ ، ۳۲ ، ۲۸ ، ۳۱ ، ۲۹

$$\bar{x} = \frac{۵۵ + ۲۷ + ۲۹ + ۳۲ + ۲۸ + ۳۱ + ۲۹}{۷} = \frac{۲۳۱}{۷} = ۳۳$$

۳-میانه و مد هر یک از داده‌های زیر را به دست آورید.

الف) ۹ ، ۹ ، ۹ ، ۹ ، ۸

$\hat{x} = ۹$ و $\tilde{x} = ۹$

ب) ۳۰۰ ، ۲۴ ، ۴۰ ، ۵۰ ، ۶۰

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۲۴ ، ۴۰ ، ۵۰ ، ۶۰ ، ۳۰۰

میانه ندارد و $\tilde{x} = ۵۰$

پ) ۱۰ ، ۳ ، ۸ ، ۱۵

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۳ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۵

میانه ندارد و $\tilde{x} = ۹$

ت) ۴ ، ۶ ، ۹ ، ۱۲ ، ۵

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۴ ، ۵ ، ۶ ، ۹ ، ۱۲

میانه ندارد و $\tilde{x} = ۶$

ث) ۲۳ ، ۱۲ ، ۱۲ ، ۲۳

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۱۲ ، ۱۲ ، ۲۳ ، ۲۳

میانه ندارد و $\bar{x} = ۱۷/۵$

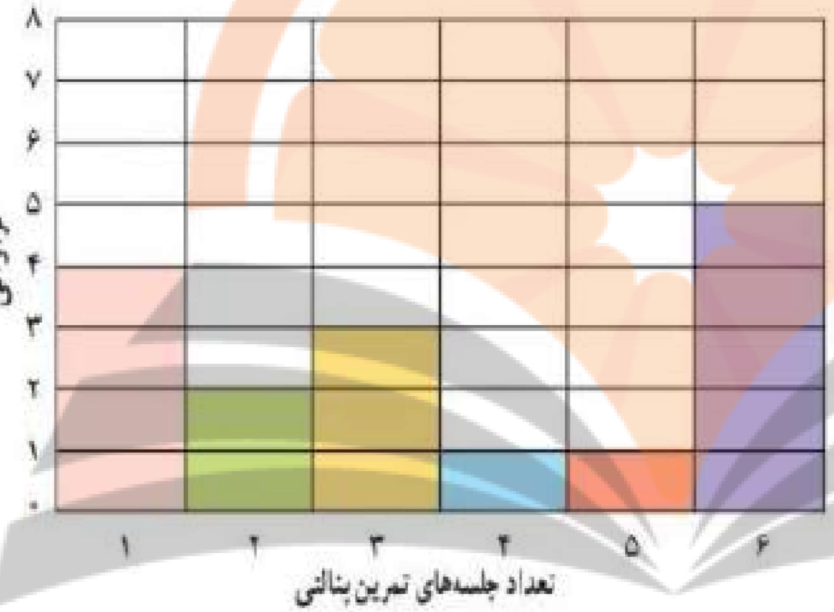
ج) ۷، ۱۳، ۴، ۷

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۴، ۷، ۷، ۱۳

$\hat{x} = ۷$ و $\tilde{x} = ۷$

۴-نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسه‌ی تمرین پنالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید.



شماره جلسه	تعداد ضربات گل شده
۱	۴
۲	۲
۳	۳
۴	۱
۵	۱
۶	۵
مجموع	۱۶

$\bar{x} = \frac{۱۶}{۶} = ۲/۷$ و $\hat{x} = ۱$

۱، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ $\Longrightarrow Q_2 = \frac{۲+۳}{۲} = ۲/۵$

۵-در جدول زیر، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش‌آموز گردآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سؤال چه اعدادی‌اند؟

نمرات درس ریاضی	۲۰	۱۶	۱۷	۱۹	۱۷/۵
	۱۸	؟	۱۸	۱۵	۱۶
میانگین نمرات = ۱۵/۶۵					
مد نمرات = ؟					

$$\bar{x} = ۱۵/۶۵ \Longrightarrow \frac{۱۷/۵ + ۱۹ + ۱۷ + ۱۶ + ۲۰ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۸ + a + ۱۸}{۱۰} = ۱۵/۶۵$$

$$\frac{a + ۱۰۶/۵}{۱۰} = ۱۵/۶۵ \Longrightarrow a + ۱۵۶/۵ = ۱۰۶/۵ \Longrightarrow a = ۰$$

$\hat{x} = ۱۶$ و ۱۸

۶-داده‌های زیر مدت زمان مطالعه‌ی یک دانش‌آموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
مدت زمان مطالعه (ساعت)	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۳	۳

این دانش‌آموز به طور میانگین چند ساعت در روز، در هفته‌ی گذشته مطالعه کرده است؟

$$\bar{x}=\frac{۲+۱/۵+۲/۵+۱/۵+۲+۳+۳}{۷}=\frac{۱۵/۵}{۷}=۲/۲۱$$

۷-یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به‌دست آمده است در صورتی که میانه و مد آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر ۴۲/۲ میلیون ریال و عدد ۹ میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا اینکه این شرکت ضرر نکند؟ میانگین معیار بهتری است تا شرکت ضرر نکند.

۸-دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه‌ی کارنامه آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۵۳	؟	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

اگر معدل موزون درصد این دانش‌آموز ۶۳ باشد، درس فیزیک را چند درصد زده است؟

$$\bar{x}=\frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}=\frac{(۴\times ۵۳)+(۳\times x)+(۱\times ۶۷)+(۱\times ۳۴)+(۴\times ۸۰)+(۳\times ۶۷)}{۴+۳+۱+۱+۴+۳}$$

$$۶۳=\frac{۸۳۴+۳x}{۱۶}\Rightarrow ۸۳۴+۳x=۱۰۰۸\Rightarrow ۳x=۱۷۴\Rightarrow x=۵۸$$

۹-میانگین ۵ داده‌ی آماری ۱۷ است، اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهدشد؟

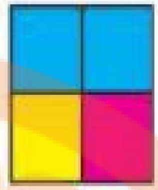
ابتدا مجموع داده‌های قبلی را به‌دست می‌آوریم سپس دو داده جدید را به آن اضافه می‌کنیم :

$$۵\times ۱۷=۸۵\Rightarrow ۸۵+۱۷+۱۱=۱۱۳$$

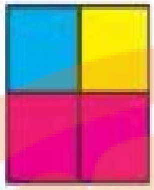
چون دو عدد ۱۷ و ۱۱ به داده‌های قبلی اضافه شده پس تعداد داده‌ها، ۷ می‌شود. بنابراین :

$$\text{میانگین داده‌های جدید}\quad \bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{۱۱۳}{۷}=۱۶/۱۴$$

۱۰-دو دانش آموز، جدول های چهار خانه ای را به صورت روبه‌رو رنگ آمیزی کرده‌اند، براساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو شکل به صورت روبه‌رو نشان داده شده است :



$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۴۷۰ \\ ۵۸۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$



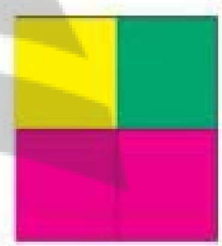
$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۸۰ \\ ۶۹۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$

حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم جدول عددی حاصل را به دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به جدول طیف رنگ‌ها، به‌دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل بالا است؟

برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.

رنگ‌ها	طیف رنگ‌ها
	۴۵۰ تا ۴۹۵
	۴۹۵ تا ۵۷۰
	۵۷۰ تا ۵۹۰
	۵۷۰ تا ۶۲۰
	۶۲۰ تا ۷۵۰

$$\begin{pmatrix} \frac{۴۷۰+۴۷۰}{۲} & \frac{۵۸۰+۴۷۰}{۲} \\ \frac{۶۹۰+۵۸۰}{۲} & \frac{۶۹۰+۶۹۰}{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۲۵ \\ ۶۳۵ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$



فصل3-درس3:معیارهای پراکندگی

فصل3-درس3

درس سوم : معیارهای پراکندگی

۱-انحراف معیار و واریانس داده‌ها

فعالیت صفحه ۹۳

در اقتصاد هر کشوری شاخصی تحت عنوان نرخ تورم، نقش بسیار مهمی را ایفا می کند. یکی از اقلام مصرفی مورد نیاز در محاسبه‌ی نرخ تورم در یک کشور، قیمت گوشت قرمز است. در جدول روبه‌رو قیمت گوشت قرمز در سال ۱۳۹۵ در شهرستان های استان تهران گردآوری شده است.

شهرستان های استان تهران	قیمت گوشت‌قرمز (هزارتومان)
تهران	۴۲
اسلام شهر	۲۰
دماوند	۲۵
رباط کریم	۲۶
ری	۲۷
شمیرانات	۴۰
شهریار	۲۰
فیروزکوه	۱۶
قدس	۲۰
ملارد	۲۱
پیشوا	۲۲
پاکدشت	۲۳
ورامین	۲۶

- میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران را به‌دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{۳۲۸}{۱۳} = ۲۵/۲۳ \Longrightarrow \bar{x} = ۲۵/۲۳$$

- در نمودار زیر، میانگین گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران را با کشیدن نقطه روی نمودار مشخص کنید.

۱-چند نقطه بالای خط قرمز، چند نقطه پایین خط قرمز و چند نقطه روی خط قرمز قرار دارند؟

۵ نقطه بالای خط قرمز ، ۸ نقطه پایین خط قرمز و هیچ نقطه‌ای روی خط قرمز قرار ندارد.

۲-. هرچقدر نقاط یا همان قیمت گوشت قرمز در هر یک از شهرستان‌های استان تهران حول خط قرمز یا همان میانگین قیمت گوشت قرمز نزدیک‌تر باشند، نشان‌دهنده‌ی چیست؟ هرچقدر دورتر باشند چطور؟

هرچقدر نزدیکتر باشد، پراکندگی قیمت‌ها کمتر است و هرچقدر دورتر باشد پراکندگی قیمت‌ها بیشتر است.

۳-معیاری برای اندازه گیری پراکندگی قیمت گوشت قرمز یا همان نقاط حول خط قرمز می‌توانید معرفی کنید؟

انحراف معیار

کار در کلاس صفحه ۹۵

انحراف معیار و واریانس مربوط به داده‌های قیمت گوشت قرمز در شهریتان‌های تهران را می‌توانید با تکمیل جدول روبه‌رو محاسبه کنید.

قیمت گوشت‌قرمز	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^۲$
۴۲	۴۲ − ۲۵ = ۱۷	۲۸۹
۲۰	۲۰ − ۲۵ = −۵	۲۵
۲۵	۲۵ − ۲۵ = ۰	۰
۲۶	۲۶ − ۲۵ = ۱	۱
۲۷	۲۷ − ۲۵ = ۲	۴
۴۰	۴۰ − ۲۵ = ۱۵	۲۲۵
۲۰	۲۰ − ۲۵ = −۵	۲۵
۱۶	۱۶ − ۲۵ = −۹	۸۱
۲۰	۲۰ − ۲۵ = −۵	۲۵
۲۱	۲۱ − ۲۵ = ۴	۱۶
۲۲	۲۲ − ۲۵ = −۳	۹
۲۳	۲۳ − ۲۵ = −۲	۴
۲۶	۲۶ − ۲۵ = ۱	۱
	σ	۷/۳۶
	$\sigma^۲$	۵۴/۲۳

۲-ضریب تغییرات داده‌ها

فعالیت صفحه ۹۶

یکی از شاخص‌های کیفیت در لاستیک‌های تولید شده اتومبیل توسط یک کارخانه، طول عمر آن لاستیک‌هاست. هر چقدر متوسط طول عمر لاستیک‌های تولیدی بیشتر و انحراف معیار طول عمر لاستیک‌ها کمتر باشد. به این معناست که لاستیک‌ها کیفیت بالایی از نظر طول عمر دارند.

حال با توجه به مطالب گفته شده به بررسی کیفیت لاستیک‌های تولیدی از نظر طول عمر دو کارخانه‌ی (الف) و (ب) می‌پردازیم.

براساس داده‌های به دست آمده میانگین طول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانه و انحراف معیار آنها به شرح جدول زیر است :

کارخانه	میانگین	انحراف معیار
کارخانه‌ی الف	۵۴۰۰۰ کیلومتر	۵۰ کیلومتر
کارخانه‌ی ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر

- شما ترجیح می‌دهید از کدام کارخانه لاستیک بخرید؟ کارخانه الف
- آیا می‌توان براساس میانگین و انحراف معیار و نمونه‌های در نظر گرفته شده قضاوت کرد؟ خیر

کار در کلاس صفحه ۹۷

الف) با کامل کردن جدول زیر، ضریب تغییرات مربوط به طول عمر دو کارخانه را محاسبه کنید.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانه‌ی الف	۵۴۰۰۰ کیلومتر	۵۰ کیلومتر	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۵۰}{۵۴۰۰۰} = ۰/۰۰۰۹$
کارخانه‌ی ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱۰۰}{۶۵۰۰۰} = ۰/۰۰۱۵$

محصولات کدام کارخانه را انتخاب می‌کنید؟ محصولات کارخانه‌ی الف

ب) حال با تغییر واحد اندازه‌گیری در جدول قبلی و میانگین و انحراف معیار طول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانه‌ی (الف) و (ب) به صورت زیر گزارش داده شده است.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانه‌ی الف	۵۴۰۰۰۰۰ متر	۵۰۰۰۰ متر	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۵۰۰۰۰}{۵۴۰۰۰۰۰} = ۰/۰۰۹$
کارخانه‌ی ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱۰۰}{۶۵۰۰۰} = ۰/۰۰۱۵$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید میانگین و انحراف معیار لاستیک‌ها برای کارخانه‌ی (الف) برحسب واحد اندازه‌گیری متر و برای کارخانه‌ی (ب) برحسب کیلومتر است. در این حالت نیز ضریب تغییرات را در جدول محاسبه کنید. آیا ضریب تغییرات به واحد اندازه‌گیری وابسته است؟ خیر، وابسته نیست.

فعالیت صفحه ۹۷

میزان بارش برف سالانه در دو پیست اسکی (الف) و (ب) برای هفت سال اندازه‌گیری و نتایج، در جدول زیر گردآوری شده است :

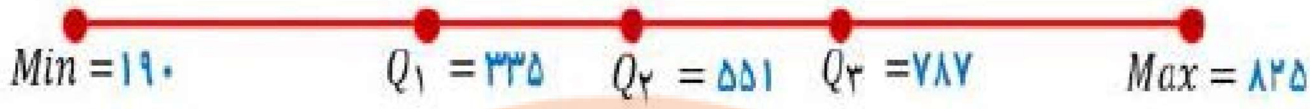
سال	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸
میزان بارش برف در پیست اسکی الف	۸۲۵	۷۲۸	۴۷۲	۷۸۷	۳۳۵	۱۹۰	۵۵۱
میزان بارش برف در پیست اسکی ب	۵۶۶	۵۸۱	۹۳	۱۰۱۶	۵۲۵	۰	۲۷۱

برای رسم نمودار آماری، مراحل زیر را انجام دهید.

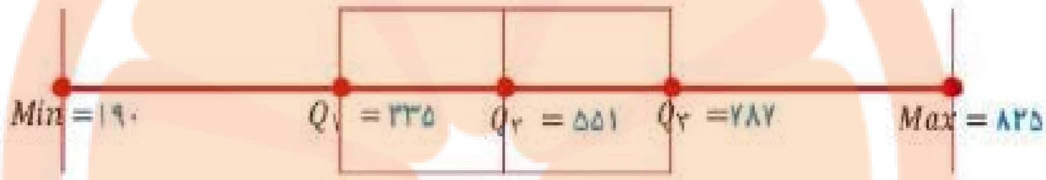
الف) جدول زیر را کامل کنید.

سال	بیشترین مقدار میزان بارش برف Max	چارک سوم میزان بارش برف Q_3	میانه میزان بارش برف Q_2	چارک اول میزان بارش برف Q_1	کمترین مقدار میزان بارش برف Min
پیست اسکی الف	۸۲۵	۷۸۷	۵۵۱	۳۳۵	۱۹۰

ب) حال مقادیر جدول را روی یک محور نمایش می‌دهیم.



پ) برای مشخص کردن حدود دامنه‌ی میان چارکی (IQR) یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم، سپس با استفاده از یک خط، میانه را در جعبه مشخص می‌کنیم و در انتها، از دو طرف جعبه به کمترین و بیشترین مقدار داده ها دو خط رسم می‌کنیم.



کار در کلاس صفحه ۹۸

- نمودار جعبه‌ای مربوط به پیست (ب) را رسم کنید. و سپس با نمودار جعبه‌ای پیست (الف) مقایسه کنید.
- اگر داده دورافتاده‌ای در داده‌ها باشد، نمودار جعبه‌ای چه تغییری می‌کند؟

وقتی پراکندگی زیاد می‌گردد نمودار کشیده‌تر می‌شود بنابراین در نمودار ب پراکندگی داده‌ها زیادتر می‌شود.

تمرین صفحه ۹۹

۱-فرض کنید سن افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند به صورت زیر است:

۶۱ ، ۵۰ ، ۶۴ ، ۲۳ ، ۴۵ ، ۱۷ ، ۷۴ ، ۵۳ ، ۲۶ ، ۵۹ ، ۳۲

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سن افراد را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۵۰۴}{۱۱} = ۴۵/۸۱ = ۴۶$$

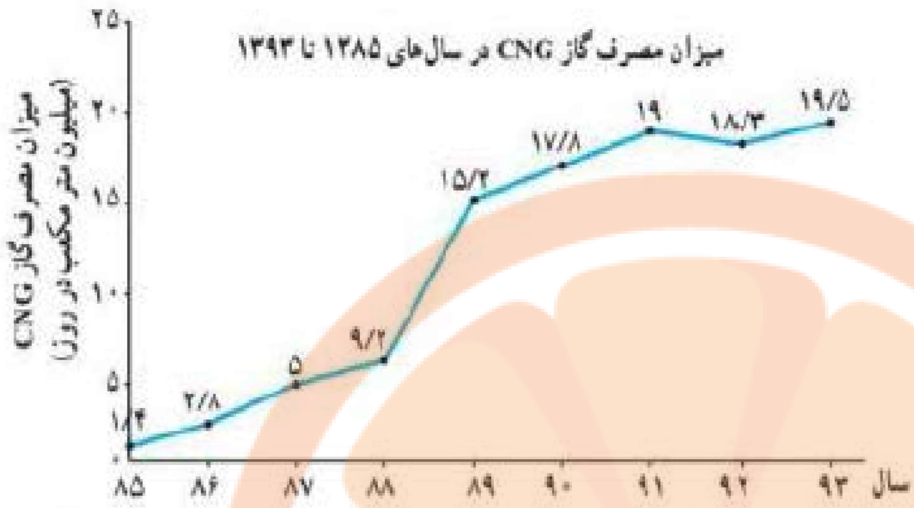
x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^۲$
۳۲	−۱۴	۱۹۶
۵۹	۱۳	۱۶۹
۲۶	−۲۰	۴۰۰
۵۳	۷	۴۹
۷۴	۲۸	۷۸۴
۱۷	−۲۹	۸۴۱
۴۵	−۱	۱
۲۳	−۲۳	۵۲۹
۶۴	۱۸	۳۲۴
۵۰	۴	۱۶
۶۱	۱۵	۲۲۵

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{۳۵۳۴}{۱۱} = ۳۲۱/۲۷$$

$$\sigma = \sqrt{۳۲۱/۲۷} = ۱۸/۰۹$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱۸/۰۹}{۴۶} = ۰/۳۹$$

۲-نمودار روبه‌رو میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید.



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۱۰۸/۲}{۹} = ۱۲/۰۲ \simeq ۱۲$$

سال	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^۲$
۸۵	۱/۴	−۱۰/۶	۱۱۲/۳۶
۸۶	۲/۸	−۹/۲	۸۴/۶۴
۸۷	۵	−۷	۴۹
۸۸	۹/۲	−۲/۸	۷/۸۴
۸۹	۱۵/۲	۳/۲	۱۰/۲۴
۹۰	۱۷/۸	۵/۸	۳۲/۶۴
۹۱	۱۹	۷	۴۹
۹۲	۱۸/۳	۶/۳	۳۹/۶۹
۹۳	۱۹/۵	۷/۵	۵۶/۲۵
مجموع	۱۰۸/۲	—	۴۴۲/۶۶

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{۴۴۲/۶۶}{۹} = ۴۹/۱۸$$

$$\sigma = \sqrt{۴۹/۱۸} = ۷/۰۱$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۷/۰۱}{۱۲} = ۰/۵۸$$

۳-انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۷، ۴، ۱۰، ۱۶، ۸، ۱۲، ۱۰۰	۳۱/۸۶	۱۰۱۵/۳	۱/۴۲
۱-، ۲-، ۳-، ۰، ۰، ۱، ۲، ۲	۱/۸۷	۳/۵	تعریف نشده
۱۰/۱۱، ۱۱/۳۶، ۱۱، ۱۰/۱۱ ۹/۶۲، ۹/۷۶، ۹/۴۲، ۹/۸۸	۰/۱۷	۰/۰۲۹	۰/۰۱۷
۲۰۰۰، ۲۵۰۰، ۳۰۰۰، ۲	۱۱۳۷/۹۸	۱۲۹۵۰۰۰/۷۵	۰/۶

۴-اعداد دلخواه را در جدول زیر بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۲،۴،۶،۸	۲	۴	$\frac{۲}{۵}=۰/۴$
۲،۳،۵،۶،۴	$\sqrt{۴/۵}$	۴/۵	$\frac{\sqrt{۴/۵}}{۴}=۰/۵۳$
۷،۷،۷،۷،۷	۰	۰	۰
۵،۶،۷،۸،۹	۱/۱۹	$\frac{۱۰}{۷}=۱/۴۲$	$\frac{۱/۱۹}{۷}=۰/۱۷$

۵-اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ باشد و میانگین آن ۴، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow ۲=\frac{\sigma}{۴} \Rightarrow \sigma=۸ \Rightarrow \sigma^۲=۶۴$$

۶-اگر n داده را c برابر کنیم ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

$$\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{\sum cx_i}{n}=c\frac{\sum x_i}{n}=c\bar{x}$$

$$\sigma_y^۲=\frac{\sum(y_i-\bar{y})^۲}{n}=\frac{\sum(cx_i-c\bar{x})^۲}{n}=\frac{\sum c^۲(x_i-\bar{x})^۲}{n}=\frac{c^۲\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}=c^۲\sigma_x^۲ \Rightarrow \sigma_y=|c|\sigma_x$$

$$CV_y=\frac{\sigma_y}{\bar{y}}=\frac{|c|\sigma_x}{c\bar{x}}=\pm\frac{\sigma_x}{\bar{x}}$$

$CV_y = \pm CV_x$

۷-فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بوته را شمرده‌ایم و نتایج زیر به‌دست آمده است :

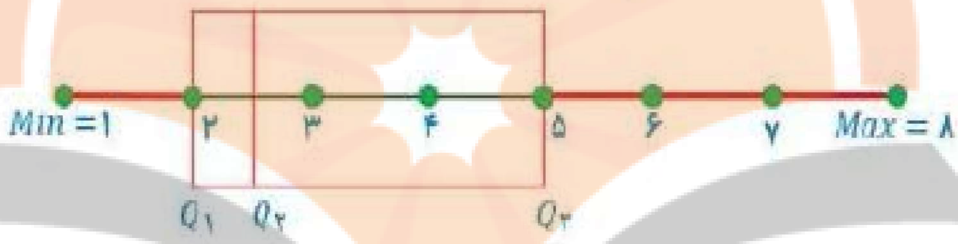
۲، ۱، ۵، ۵، ۲، ۲، ۲، ۲، ۳، ۱، ۱، ۱، ۲، ۴، ۷، ۱، ۴، ۶، ۸، ۳، ۴، ۷

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

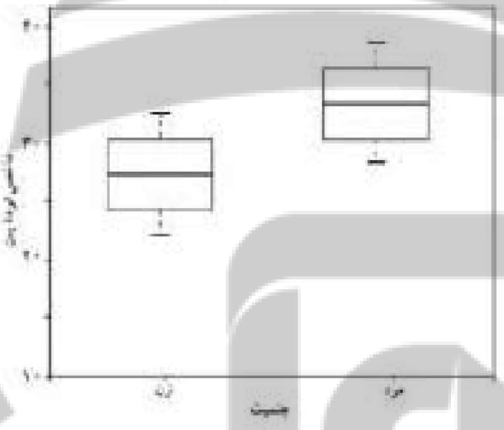
ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴، ۵، ۵، ۶، ۷، ۷، ۸

$min = ۱$ و $max = ۸$ و $Q_۱ = ۲$ و $Q_۲ = \frac{۲ + ۳}{۲} = ۲/۵$ و $Q_۳ = ۵$



۸-نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص توده‌ی بدن (BMI) به تفکیک جنسیت رسم شده است. این نمودار را تفسیر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) میانگین شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان ؟

میانگین شاخص توده‌ی بدنی در آقایان بیشتر است.

ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانم‌ها بیش‌تر است یا آقایان؟

توده‌ی پراکندگی یکسان است.

۹-داده‌های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ده سال گذشته است :

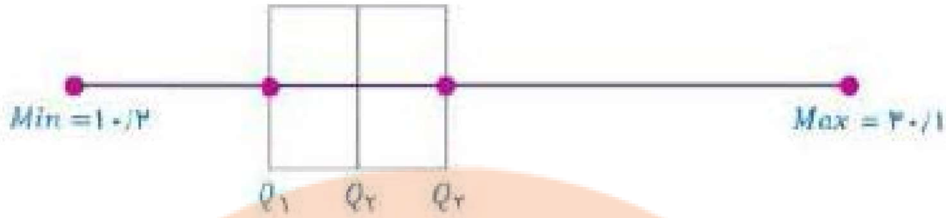
سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	۱۱/۵	۱۱/۳	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۳/۵	۱۳/۳	۱۲/۲	۱۰/۴	۳۰/۱

نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۱۰/۲، ۱۰/۴، ۱۰/۵، ۱۱/۳، ۱۱/۵، ۱۱/۹، ۱۲/۲، ۱۳/۵، ۳۰/۱

$min = ۱۰/۲$ و $max = ۳۰/۱$ و $Q_۱ = ۱۰/۵$ و $Q_۲ = \frac{۱۱/۵ + ۱۱/۹}{۲} = ۱۱/۷$ و $Q_۳ = ۱۳/۳$


Min =۱۰/۲
Max = ۳۰/۱
Q۱
Q۲
Q۳

فصل4-درس1:گردآوری داده ها

فصل4-درس1

درس اول : گردآوری داده‌ها

فعالیت صفحه ۹۶

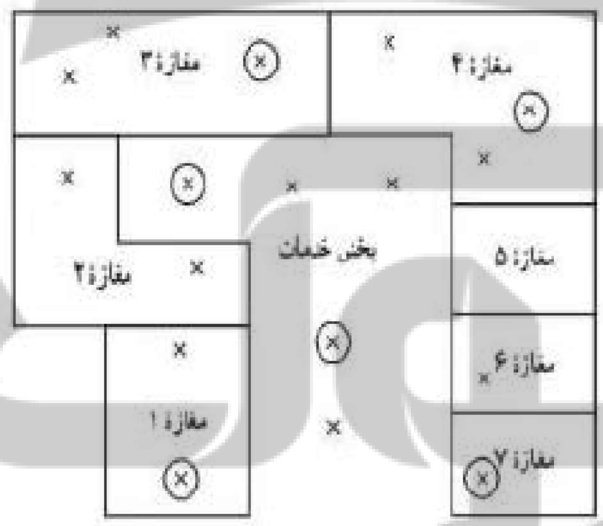
می‌خواهیم برخی از ویژگی‌های مگس‌های سفید مزاحم در شهر تهران را بررسی کنیم. آیا برای انجام این کار می‌توانیم ویژگی‌های همه مگس‌های سفید را اندازه‌گیری کنیم؟ خیر آیا همه آنها در دسترس‌اند؟ خیر آیا زمان و هزینه لازم برای این کار در اختیار داریم؟ خیر

کار در کلاس صفحه ۱۰۴

در فعالیت قبل هر مگس سفید واحد آماری است. همه‌ی مگس‌های سفید، که کل واحدهای آماری هستند، جامعه‌ی آماری را تشکیل می‌دهند. اگر سن همه‌ی مگس‌های سفید را در اختیار داشته باشیم، داده‌های نمونه را داریم. ۱۰۰ مگس سفید معرف یک نمونه‌گیری است.

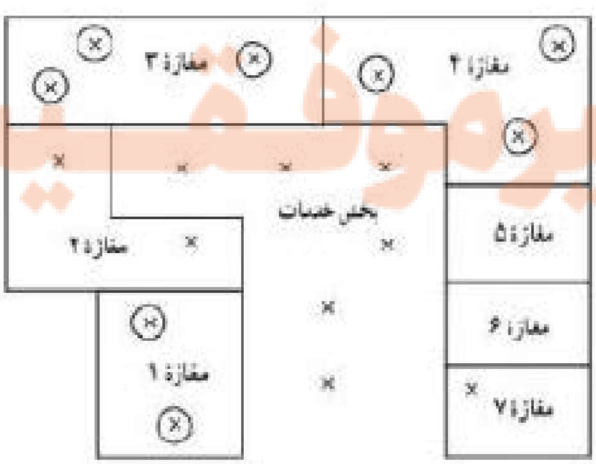
فعالیت صفحه ۹۵

۱-می‌خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مجتمع تجاری را محاسبه می‌کنیم. اگر این مجتمع از ۷ مغازه و یک بخش خدمات تشکیل شده باشد، که روی هم ۱۷ کارکن دارند، چگونه از بین ۱۷ نفر، ۶ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنید؟ یک راه ساده برای انجام این کار نوشتن اسمی کارکنان با شماره‌ی کارمندی آنها روی ۱۷ برگه‌ی کوچک و انتخاب تصادفی ۶ تا از آنهاست. آیا این روش نمونه‌گیری، نمونه‌گیری تصادفی ساده است؟ بله آیا همه‌ی واحدهای جامعه احتمال برابری برای انتخاب دارند؟ بله

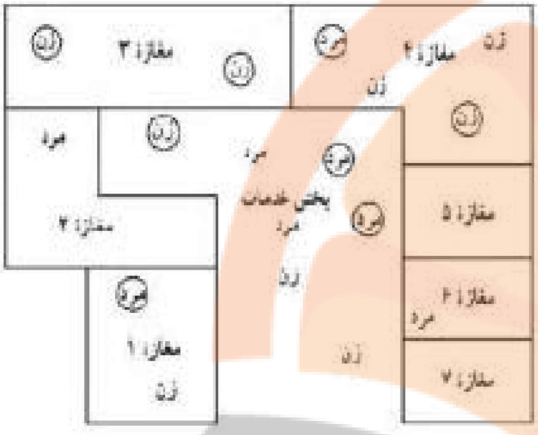


در شکل روبه‌رو نقشه‌ای از مجتمع تجاری ترسیم شده که کارکنان با × و دور انتخاب‌شدگان یک دایره رسم شده است.

۲-هر یک از ۷ مغازه و بخش خدمات را به‌صورت یک گروه فرض می‌کنیم. حال از بین ۸ گروه در نظر گرفته شده، سه تا از آنها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و در هر یک سرشماری انجام می‌دهیم. آیا این روش نمونه‌گیری سریع‌تر است؟ بله

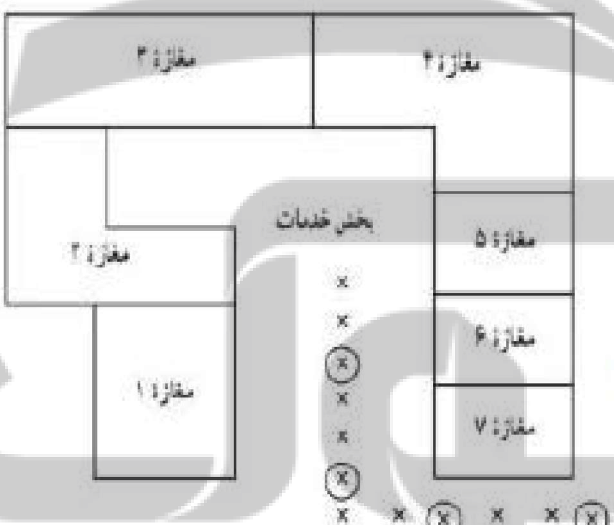


سؤال : می‌خواهیم میانگین نمرات ریاضی دانش‌آموزان شهر تهران را محاسبه کنیم. اگر فهرست همه دانش‌آموزان را نداشته باشیم، اما فهرست مدارس موجود باشد، نمونه‌گیری خوشه‌ای، راه مناسبی برای گردآوری داده‌هاست. اگر بودجه کافی یا زمان لازم برای نمونه‌گیری تصادفی ساده نداشته باشیم آیا این روش مقرون به صرفه است؟ بله



۳-اگر بخواهیم یک نمونه ۸ تایی شامل دقیقاً ۴ مرد و ۴ زن از مجتمع تجاری بگیریم، چگونه این کار را انجام می‌دهیم؟ نمونه‌گیری طبقه‌ای زمانی که جامعه به دو یا چند بخش تقسیم می‌شود که عضو مشترکی ندارند، می‌توان از هر بخش جداگانه نمونه‌گیری کرد. این کار با افزایش هزینه یازمان همراه است، ولی انتظار داریم که دقت را نیز افزایش دهد.

۴-فرض کنید در مجتمع، ۱۲ نفر حضور دارند. صبر می‌کنیم که مجتمع تجاری تعطیل شود و هنگام خروج کارکنان می‌خواهیم نمونه ۴ نفری انتخاب کنیم. برای این منظور، همانند شکل زیر عمل کرده‌ایم. ابتدا از ۳ نفر یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. در این شکل، نفر اول انتخاب شده است. حال با همین رویه برای سه نفر بعد هم، نفر اول را انتخاب می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. این روش نمونه‌گیری شباهت بیشتری به کدام‌یک از روش‌های نمونه‌گیری قبلی دارد؟ خوشه‌ای یا طبقه‌ای؟ نمونه‌گیری طبقه‌ای **این کار باعث چه نوع صرفه‌جویی می‌شود؟** هم در وقت و هم در هزینه صرفه جویی می‌شود.



به نظر شما این نوع نمونه‌گیری در کدام‌یک از مثال‌های زیر امکان دارد :

- گردآوری اطلاعات از مبدأ و مقصد مسافران در خروجی ـ ورودی یک شهر : امکان دارد
- کنترل کیفیت یک خط تولید : امکان دارد
- انتخاب نمونه از ماهی‌های یک حوضچه : امکان دارد
- زمانی که فهرستی از واحدهای جامعه وجود نداشته باشد. : امکان دارد
- فهرست واحدهای آماری ترتیب تصادفی داشته باشند. : امکان دارد

کار در کلاس صفحه ۱۰۷

جدول زیر را کامل کنید.

روش نمونه‌گیری	مزیت	محدودیت
تصادفی ساده	همه‌ی داده‌ها برای انتخاب شدن در نمونه احتمال یکسان دارند.	دسترسی به همه‌ی داده‌ها دشوار و هزینه‌بر است.
خوشه‌ای	دسترسی ساده به همه‌ی داده‌ها و هم شانس بودن داده‌ها	هزینه‌بر بودن – وقت‌گیر بودن داده‌ها
سامانمند	دسترسی ساده به همه‌ی داده‌ها و هم شانس بودن داده‌ها	هزینه‌بر بودن – وقت‌گیر بودن داده‌ها – داده انتخاب شده ممکن است ویژگی مورد نظر را نداشته باشد.

فعالیت صفحه ۱۰۷

از مگس های سفید با چه روشی می توان نمونه گیری کرد؟ نمونه‌گیری خوشه‌ای فهرستی از آنها نداریم. تعداد آنها را هم نمی دانیم. می توان چند منطقه از تهران را به تصادف انتخاب کرد و در هر منطقه نمونه در دسترس را انتخاب و بررسی کنیم. آیا این روش نمونه گیری به تمامی واحدهای جامعه شانس انتخاب می دهد؟ خیر

کار در کلاس صفحه ۱۰۸

راه حلی ارائه کنید که نمونه‌گیری های غیر احتمالی زیر را احتمالی می کند، هر چند که به صورت غیر واقعی باشد.

مثال	نمونه‌گیری غیراحتمالی	نمونه‌گیری احتمالی
نمونه‌گیری از یک قفس بزرگ خرگوش های یک آزمایشگاه	بدون برنامه‌ریزی خرگوش‌هایی را بر می‌دارد که دستش به آنها می‌خورد.	خرگوش‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم و از هر دسته یک خرگوش برمی‌داریم.
در مطالعاتی که در آنها فرآیند سنجش که سنجیده می‌شود ناخوشایند یا درد سرآفرین است.	داوطلبانی که حاضر به پاسخ به سؤالات شما در یک نظرسنجی می‌شوند.	ابتدا اشخاص را به دسته‌های مختلف غیرمتداخل تقسیم‌بندی می‌کنیم و سپس انتخاب می‌کنیم.
نمونه‌گیری از زغال‌سنگ‌های یک واگن	نمونه در دسترس انتخاب می‌شود.	ابتدا به چند قسمت تقسیم می‌کنیم و سپس از هر قسمت نمونه‌ای را انتخاب می کنیم.

فعالیت صفحه ۱۰۸

فرض کنید آمارگیری می‌خواهد بداند در یک شهر خانواده‌ها چند نفره‌اند. او برای این کار صد نفر را به تصادف انتخاب می‌کند و از آنها می‌پرسد: «خانواده شما چند نفر است؟»

آیا این روش برای نمونه‌گیری درست است؟ جواب منفی است! دلیل آن هم این است که واحدهای آماری مورد نظر در این مسئله خانواده‌ها هستند نه افراد. آیا خانواده‌های مختلف احتمال حضور برابر در این نمونه‌گیری را دارند؟ واضح است که احتمال حضور هر خانواده متناسب با تعداد اعضای آن است و مثلاً احتمال حضور یک خانواده شش نفره دو برابر احتمال حضور یک خانواده سه نفره است و این، یعنی شرایط نمونه‌گیری ساده برقرار نیست. نتیجه چنین ایرادی در نمونه‌گیری این است که هر چه تعداد نمونه‌ها را افزایش دهیم، نتایج به مقداری اشتباه نزدیک‌تر می شود. مثلاً فرض کنید آمار واقعی تعداد افراد خانواده‌ها چنین باشد:

تعداد افراد	۱	۲	۳	۴	۵ و بیشتر
درصد	۸/۵	۲۰/۷	۲۸/۵	۲۷/۶	۱۴/۷

در این جامعه تعداد خانواده‌های دو نفره تقریباً $\frac{۲۰/۷}{۱۴/۷} = ۱/۴$ برابر تعداد خانواده‌های پنج نفره (وبیشتر) است. ولی با آمارگیری نادرستی که توضیح داده شد به نتیجه دیگری خواهیم رسید؛ احتمال حضور یک خانواده پنج نفره (وبیشتر) در نمونه‌ها بیشتر از ۲/۵ برابر احتمال حضور یک خانواده دونفره است و لذا عددی که در روش نادرست آماری به‌دست می‌آید کمتر از $۰/۵۶ = \frac{۱/۴}{۲/۵}$ است. نتیجه اینکه هر چند واقعیت این است که نسبت خانواده‌های دونفره بسیار بیشتر از خانواده‌های ۵نفره (وبیشتر) است، ولی ما با نمونه‌گیری اشتباه به نتیجه‌ای بسیار متفاوت می‌رسیم.

کار در کلاس صفحه ۱۰۹

فرض کنید در شهری جمعیت کلاس‌های پایه‌ی ششم دبستان به شکل زیر باشد:

تعداد دانش آموز	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵
تعداد کلاس	۷	۹	۱۰	۱۱	۷	۱۱	۸	۸	۷	۵	۴

الف) چه تعداد کلاس پایه‌ی ششم در این شهر وجود دارد؟

$$۷ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۷ + ۱۱ + ۸ + ۸ + ۷ + ۵ + ۴ = ۸۷$$

تعداد دانش آموزان پایه‌ی ششم چندتاست؟

$$(۲۵ \times ۷) + (۲۶ \times ۹) + (۲۷ \times ۱۰) + (۲۸ \times ۱۱) + (۲۹ \times ۷) + (۳۰ \times ۱۱) + (۳۱ \times ۸) + (۳۲ \times ۸)$$
$$+ (۳۳ \times ۷) + (۳۴ \times ۵) + (۳۵ \times ۴) = ۲۵۶۵$$

ب) چه درصدی از کلاس‌های پایه‌ی ششم بیشتر از ۳۰ دانش‌آموز است؟

تعداد کلاس‌های بیش از ۳۰ نفر : $۸ + ۸ + ۷ + ۵ + ۴ = ۳۲ \Rightarrow \frac{۳۲}{۸۷} \times ۱۰۰ = ۳۶/۷۸\%$

پ) اگر به تصادف یک دانش‌آموز ششم دبستانی را انتخاب کنیم، احتمال اینکه کلاسی که در آن درس می‌خواند بیشتر از ۳۰ دانش‌آموز داشته باشد، چقدر است؟

$$\frac{\text{تعداد کلاس‌های بیش از ۳۰ نفر}}{\text{تعداد کل دانش‌آموزان}} = \frac{۱۰۴۵}{۲۵۶۵} = ۰/۴$$

ت) فرض کنید فردی برای اینکه بفهمد کلاس‌های ششم دبستان چند نفری‌اند، تعداد زیادی دانش‌آموز ششم دبستانی را به تصادف انتخاب کند و ازآنها بپرسد «کلاس شما چند نفره است؟» این کار چه ایرادی دارد؟ وقت‌گیر است.

ث) اگر با روش قبل درصد کلاس‌های با بیش از ۳۰ دانش‌آموز را محاسبه کنیم، نتیجه از جواب واقعی چند درصد فاصله خواهد داشت؟ تقریباً تا ۶۴ درصد فاصله خواهد داشت.

کار در کلاس صفحه ۱۰۹

فرض کنید بخواهیم میزان مطالعه‌ی غیر درسی دانش‌آموزان یک مدرسه را بررسی کنیم. برای این کار این سؤال را طراحی کرده‌ایم و می‌خواهیم از یک نمونه ۳۰ تایی آن را بپرسیم :

«در یک سال گذشته چند کتاب غیردرسی خوانده‌اید؟»

روش‌های زیر را نقد کنید :

الف) پرسیدن سؤال از تعدادی از دانش‌آموزانی که در کتابخانه هستند.

احتمال بالا بودن میزان مطالعه بیشتر است زیرا دانش‌آموزانی که در کتابخانه هستند به مطالعه علاقه و یا عادت دارند.

ب) گذاشتن تعدادی پرسش‌نامه در محل رفت و آمد دانش‌آموزان.

دانش‌آموزانی به سراغ پرسش‌نامه می‌روند که اهل مطالعه هستند و در این صورت نتایج غیرواقعی خواهد بود.

پ) پرسیدن از دانش‌آموزانی که صبح وارد مدرسه می‌شوند و مایل‌اند به سؤال مذکور جواب دهند.

قطعاً همه دانش‌آموزان مایل به پاسخ‌گویی نخواهند بود به خصوص دانش‌آموزانی که به مطالعه عادت ندارند.

شما چه روشی را پیشنهاد می‌کنید که به نمونه‌گیری تصادفی نزدیکتر باشد؟

دانش‌آموزانی از همه پایه‌ها و به صورت تصادفی برای پر کردن فرم انتخاب شوند.

کار در کلاس صفحه ۱۱۰

از جمله مسائلی که مردم در مورد آنها به نظرسنجی‌ها علاقه زیادی نشان می‌دهند، انتخابات است. با این وجود، گاهی مردم و گاهی گروه‌های سیاسی از روش‌هایی برای کشف نظر مردم استفاده می‌کنند که آنها را گمراه می‌کند.

در این مورد روش‌های زیر را نقد کنید :

الف) پرسیدن نظر دوستان و اطرافیان.

نظرسنجی به سمت انحراف خواهد رفت زیرا دوستان و اطرافیان یک شخص غالباً هم نظر خواهند بود.

ب) طراحی یک نظرسنجی در وبگاهی پرطرف‌دار و لحاظ کردن ساز و کاری که از یک آدرس بیش از یک بار رأی گرفته نشود.

در یک وبگاه قطعاً یک جهت گیری خاصی مطرح است و بنابراین نظرسنجی به سمت انحراف خواهد رفت.

کار در کلاس صفحه ۱۱۳

۱-چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش‌آموزان یک مدرسه پیشنهاد می‌کنید؟ پرسش‌نامه

۲-فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری همه داده‌های دانش‌آموزان در اختیار نداشته باشید. اگر بخواهیم نمونه‌ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید که نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود؟

اصولاً دانش‌آموزان براساس بلندی و کوتاهی قد در کلاس درس می‌نشینند بنابراین از هر کلاسی به صورت تصادفی و از سه قسمت جلوی کلاس، وسط کلاس و آخر کلاس، دانش‌آموزانی را انتخاب می‌کنیم.

کار در کلاس صفحه ۱۱۴

الف) کدام روش برای گردآوری هر یک از داده‌ها مناسب است؟

۱-تعداد قلم‌های هر دانش‌آموز در یک کلاس : مصاحبه

۲-ساعات خواب دانش‌آموزان کلاس درس شما در شب گذشته : پرسش‌نامه

۳-طول قد دانش‌آموزان یک کلاس : پرسش‌نامه

ب) می‌خواهیم طول قد دانش‌آموز یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش زیر آمارگیری کنیم. هر یک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را ای بین برد؟

پرسش‌نامه : اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.

پرسش‌نامه را تحویل می‌دهیم و پس از زمانی معین برای پاسخگویی، آن را دریافت می‌کنیم و یا پرسش‌نامه را به صورت اینترنتی برای هر شخص می‌فرستیم.

مشاهده : اگر به دقت زیادی نیاز داشته باشیم، مناسب نیست.

از وسایلی که قد را به صورت دقیق اندازه‌گیری می‌کنند استفاده می‌کنیم.

دادگان‌ها : همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار نیست.

اطلاعات ثبتی توسط دانش‌آموزان ارسال شود.

فعالیت صفحه ۱۱۴

قرار است درباره افرادی که از کوه دنا بالا رفته‌اند، پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش، همه‌ی افرادی هستند که توانسته‌اند به قله برسند. هدف از این پژوهش می‌تواند فرهنگی، یا علمی باشد. بسته به نوع پژوهش، یک یا چند ویژگی این افراد (مانند طول قد یا جنسیت) مورد نیاز است. به هر یک از این ویژگی‌ها که مورد پژوهش قرار می‌گیرد، متغیر می‌گویند. سایر متغیرها می‌توانند مواردی مانند : سن، وزن، ملیت، میزان تحصیلات و درآمد باشند. متغیرهای مورد بررسی در یک پژوهش ممکن است کمی یا کیفی باشند.

از آنهایی که همه داده‌های جامعه در اختیار است و همه داده‌ها ثابت‌اند بنابراین پارامتر مورد نظر نیز ثابت خواهد ماند.

تمرین صفحه ۱۱۶

۱-در نمونه‌گیری تصادفی ساده، احتمال اینکه فرد به خصوصی در اولین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟ اگر مسئله با جای‌گذاری باشد، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟ اگر مسئله بدون جای گذاری باشد، و از نتیجه انتخاب اول اطلاع نداشته باشیم، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدراست؟ در هر سه حالت احتمال برابر است با : $\frac{1}{\text{تعداد اعضای نمونه}}$

۲-آیا در نمونه‌گیری خوشه‌ای احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است؟ بله چرا؟ زیرا واحدهای آماری هم‌شانس هستند. احتمال انتخاب خوشه‌ها چطور؟ بله آیا این روش نمونه گیری احتمالی است؟ بله

۳-روش‌های نمونه‌گیری احتمالی چه مزیتی بر نمونه‌گیری‌های غیر احتمالی دارند؟

در روش‌ها نمونه‌گیری احتمالی همه اعضا می‌توانند انتخاب شوند و نتیجه هم‌شانس است.

۴-برای هریک از روش‌های نمونه‌گیری احتمالی دو مثال واقعی بیاورید.

نمونه‌گیری ساده :

۱-انتخاب چند نفر از شرکت‌کنندگان در یک جشنواره برای اهدا جوایز قرعه‌کشی

۲-انتخاب ۱۰۰ نفر از کارکنان یک کارخانه برای نظرسنجی

نمونه‌گیری خوشه‌ای :

۱-انتخاب دانشجویان دانشگاه‌های آزاد یک شهر

۲-انتخاب دانش‌آموزان چند منطقه از یک شهر

نمونه‌گیری طبقه‌ای :

۱-انتخاب دانشجویان ممتاز یک دانشگاه در سه سال ۱۳۹۴ تا ۱۳۹۶

۲-انتخاب کتاب از بین ۳ نوع کتاب تاریخی، رملن و علمی یک کتابخانه برای بررسی میزان امانت گرفتن آنها

نمونه‌گیری سامانمند :

۱-دانش‌آموزان یک کلاس را براساس فامیل به ترتیب(حروف الفبا) به گروه‌های ۵ نفره تقسیم می‌کنیم و سپس نفر دوم هر گروه را انتخاب می‌کنیم.

۲-از هر ۵ دانش‌آموزی که وارد مدرسه می‌شود نفر دوم را انتخاب می‌کنیم.

۵-اگر اندازه‌ی جامعه بزرگ باشد، نمونه‌گیری با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری تقریباً مثل هم هستند. در این صورت، آیا می‌توانید راه حل کلی برای انتخاب تصادفی n نمونه از یک فهرست N تایی ارائه کنید؟

از فهرست N تایی یک نمونه تصادفی انتخاب می‌کنیم.و این کار را n تکرار می‌کنیم.

۶-آیا احتمال انتخاب واحدهای آماری در نمونه‌گیری طبقه‌ای برابر است؟ در هر طبقه چطور؟

بله، در نمومه‌گیری طبقه‌ای این احتمال هم‌شانس است.

۷-فرق بین داده و متغیر چیست؟

داده‌ها واقعیت‌هایی هستند که به عنوان مرجع و به صورت خام برای محاسبه و استنباط ما از یک چیز به کار می‌رود و متغیر کمیتی است که می‌تواند از عضوی به عضو دیگر متفاوت باشد و مقادیر مختلفی به آن اطلاق می‌شود. در واقع متغیر ویژگی‌هایی از چیزی (شی یا شخص) است که داده‌های آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۸-فرق بین آماره با پارامترچیست؟

پارامتر کمیتی است که مشخصه‌ای معین را در مورد کل جامعه شرح می‌دهد. اما آماره کمیتی است که به عنوان برآورد پارامتر استفاده می‌شود و از یک نمونه به دست می‌آید.

۹-در یک جامعه‌ی آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ خیر اگر سه نمونه با اندازه‌ی یکسان از یک جامعه داشته باشیم، می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟ بله

۱۰-در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاهای گیاهی، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند؟

الف) متغیر را مشخص کنید. این متغیر کمی است یا کیفی؟ وعده غذایی، کیفی

ب) کدام روش گردآوری داده‌ها برای مطالعه مناسب است؟ مصاحبه

پ) جامعه‌ی آماری در اینجا چیست؟ در این مطالعه پارامتر و آماره چه چیزی می‌توانند باشند؟ ۱۲۶۱ مشتری

۱۱-کدام روش گردآوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

- میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه‌ی برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها.

  پرسش‌نامه، هر مشتری با آرامش پرسش‌نامه را تکمیل کند.

– سن همه‌ی دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایه‌ی دهم.

دادگان، دانش‌آموزان در هنگام ثبت نام اطلاعات خود را به دبیرستان داده‌اند.

– تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.

مشاهده، صرفاً با مشاهده می‌توان به این اطلاعات دست یافت.

۱۲-فرض کنید جامعه‌ای از $N = ۱۰۰$ عضو تشکیل شده و می‌خواهیم نمونه‌ای به اندازه‌ی $n = ۲۰$ از آن انتخاب کنیم. در هر یک از حالت‌های زیر احتمال انتخاب هر عضو جامعه به عنوان نمونه چقدر است؟ نام هر روش نمونه گیری را بگوید.

الف) اگر جامعه به دو قسمت ۵۰ تایی تقسیم شود و بخواهیم از هر قسمت نمونه‌ی تصادفی ۱۰ تایی انتخاب کنیم.

نمونه گیری طبقه‌ای، $\frac{۱}{۲۵}$

ب) اگر جامعه به تصادف به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شود و دو قسمت را به عنوان نمونه انتخاب کنیم.

نمونه گیری خوشه‌ای، $\frac{۱}{۵}$

پ) اگر جامعه به تصادف به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود، و از قسمت اول یک عضو به تصادف انتخاب شود. فرض کنید عضو انتخابی دومین عضو باشد و از قسمت‌های بعدی نیز دومین عضو انتخاب شود.

نمونه‌گیری سیستماتیک، $\frac{۱}{۵}$

۱۳-دلایل اریبی در نمونه‌گیری‌های زیر را ذکر کنید. کدام روش گردآوری داده‌ها برای آنها مناسب‌تر است؟

الف) نمونه‌گیری راحت : افراد در دسترس را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.

افرادی که نیستند انتخاب نمی‌شوند.

ب) نمونه‌ی غیر تصادفی : عامل شانس در انتخاب نمونه نقشی ندارد.

انتخاب براساس سلیقه صورت می‌گیرد.

پ) نمونه‌گیری ایمیلی (رایانامه‌ای): پرسش‌نامه‌ای به ایمیل‌های انتخاب شده ارسال می شود.

افرادی که ایمیل ندارند انتخاب نمی‌شوند.

ت) نمونه‌گیری تلفنی : از دفترچه‌ی راهنمای تلفن تعدادی شماره به تصادف انتخاب می‌شود.

افرادی که تلفن ندارند انتخاب نمی‌شوند.

ث) برخی از اعضای انتخاب شده در نمونه حاضر به پاسخگوی نمی‌باشند.

فقط افرادی که مایل به پاسخگویی هستند انتخاب می‌شوند.

۱۴-نوع روش نمونه‌گیری مناسب تر را انتخاب کنید.

الف) شرکت وارد کننده‌ی خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آنها می‌خواهد ده درصد از خودروهایی را که به مرور زمان وارد کشور می شوند بازرسی کند. : خوشه‌ای

ب) مدیر مدرسه‌ی ۶۰۰ نفری می‌خواهد نظر دانش آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه براساس یک نمونه‌ی ۱۲ تایی بداند. : تصادفی

پ) در قسمت قبل اگر مدرسه، شش پایه داشته باشد و ما حدس بزنیم که نظر ۶ پایه باهم تفاوت دارد (با فرض برابر بودن تعداد دانش‌آموزان در پایه های مختلف). : سیستماتیک

۱۵-چگونه از ارقام ۰ تا ۹ عدد تصادفی انتخاب می‌کنید؟ آیا با روش پیشنهادی شما می‌توان عدد تصادفی بین اعداد ۰ تا ۹۹ انتخاب کرد؟ آیا امکان توسعه‌ی روش پیشنهادی شما به انتخاب تصادفی از فهرستی ۱۰۰۰ تایی امکان‌پذیر است؟

به کمک تابع *Rand* در ماشین حساب در هر سه حالت می‌توان عددی تصادفی انتخاب کرد. به این صورت که یک عدد بین ۰ و ۱ در نظر می گیریم و آن را در ۹ ضرب می‌کرده و سپس گرد می‌کنیم تا عددی بین ۰ تا ۹ به صورت تصادفی انتخاب شود. حال اگر عددی که بین ۰ تا ۱ انتخاب کردیم را در ۹۹ ضرب کنیم می‌توان عددی بین ۰ تا ۹۹ به دست آورد و برای فهرست هزارتایی نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

فصل4-درس2:برآورد

قصل4-درس2

درس دوم : برآورد

فعالیت صفحه ۱۱۸

یک شرکت تولید لیوان شیشه‌ای می‌خواهد تعداد لیوان‌هایی را که در یک بسته قرار می‌دهد مشخص کند. تعداد لیوان‌ها در هر بسته به میانگین تعداد اعضای کشور بستگی دارد که بُعد خانوار نام دارد. مثلاً در ۷ سال پیش بُعد خانوار(میانگین تعداد اعضای خانواده‌ها) ۴ بوده است. لذا بسته‌بندی‌ها از ۶ به ۴ کاهش داده شد. از آنجا که فروش شرکت کم شده، به نظر کارشناسان، دلیل آن تغییر بُعد خانوار در کشور است. بُعد خانوار هر کشور از اطلاعات سرشماری قابل دسترسی است که ۷ سال پیش انجام شده است، که در ایران هر ۱۰ سال یک بار انجام می‌شود، لذا داده‌های جدید آن تا ۳ سال آینده در دسترس نیست. از آنجا که سرشماری روش مقرون به‌صرفه‌ای برای گردآوری داده‌ها به‌منظور پاسخگویی به این سوال نیست، شرکت تصمیم می‌گیرد که بُعد خانوار خریدارهای محصول این شرکت را به وسیله نمونه‌گیری انجام دهد.

در اینجا صورت ساده‌تر آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، بُعد خانوار ۹ خریدار محصول به صورت زیر باشد. میانگین بُعد این نمونه چقدر است؟ میانگین بُعد این نمونه ۳/۳۳ است.

۳	۲	۷	۲	۵	۳	۳	۱	۴

در این فعالیت میانگین تعداد اعضای خانوار پارامتر است. آماره، خریدار محصول؛ و برآورد نقطه‌ای پارامتر میانگین بُعد این نمونه است.

کار در کلاس صفحه ۱۱۹

فرض کنید، جامعه از ۶ نفر تشکیل شده باشد با درآمد ماهیانه برحسب میلیون تومان به صورت زیر :

۲	۵	۳	۰	۱	۴

می‌خواهیم براساس نمونه‌ای به اندازه ۱، میانگین این جامعه‌ی ۶ عضوی را برآورد کنیم. در واقع باید از بین ۶ نفر، یکی را به تصادف انتخاب کنیم. اگر شخصی انتخاب شود که درآمدش ۵ باشد، این عدد برآورد میانگین درآمد همه ی افراد است. ممکن است فرد انتخابی درآمدی نداشته باشد. آن‌گاه صفر به عنوان نمونه انتخاب شده و برآورد میانگین درآمد این افراد برابر ۰ می‌شود. نمونه‌های مختلف منجر به برآوردهای متفاوتی می‌شوند.

- در این مثال، پارامتر جامعه چیست و مقدار آن چقدر است؟ پارامتر جامعه، میانگین درآمد افراد است که برابر با ۲/۵ می‌باشد.
- آیا براساس هر یک از نمونه‌ها برآورد به مقدار پارامتر نزدیک است؟ خیر
- چه راه‌حلی پیشنهاد می‌کنید که برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود؟ با افزایش دادن اندازه‌ی نمونه می‌توان برآورد را به پارامتر نزدیک کرد.

– آیا نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی ۲ وجود دارد که مقدار پارامتر را دقیقاً ۲/۵ برآورد کند؟ بله، نمونه ۴ و ۱

– آیا امکان دارد با نمونه‌های مختلف برآوردهای برابر به دست آوریم؟ بله

– بدون شمارش بگویید امکان مشاهده چند نمونه‌ی دوتایی داریم؟ ۱۵

در جدول زیر، احتمال مشاهده هر یک از مقادیر برآورد میانگین برای نمونه‌های دوتایی آمده است.

نمونه	{۴,۵}	{۳,۵}	{۲,۵}{۳,۴}	{۱,۵}{۲,۴}	{۰,۵}{۱,۴}{۲,۳}	{۰,۴}{۱,۳}	{۰,۳}{۱,۲}	{۰,۲}	{۰,۱}
$\bar{x}$	۴/۵	۴	۳/۵	۳	۲/۵	۲	۱/۵	۱	۰/۵
احتمال	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$

اگر نمونه‌گیری تصادفی ساده به اندازه‌ی $n = ۳$ از این ۶ عضو جامعه انجام دهیم، همانند جدول قبل مقادیر $\bar{x}$ و احتمال مشاهده هر مقدار را محاسبه و در جدول بنویسید.

نمونه	{۰,۱,۲}	{۰,۱,۳}	{۰,۱,۴}	{۰,۱,۵} {۰,۲,۴} {۱,۲,۳}	{۰,۲,۵} {۰,۳,۴} {۱,۲,۳}
$\bar{x}$	$\frac{۳}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۶}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$
احتمال	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$
نمونه	{۰,۱,۳} {۱,۳,۴} {۱,۲,۵}	{۱,۳,۵} {۲,۳,۴} {۰,۴,۵}	{۱,۴,۵} {۲,۳,۵}	{۲,۴,۵}	{۳,۴,۵}
$\bar{x}$	$\frac{۸}{۳}$	$\frac{۹}{۳}$	$\frac{۱۰}{۳}$	$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱۲}{۳}$
احتمال	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$

فعالیت صفحه ۱۱۹

جدول به دست آمده از کار در کلاس قبل را برای $n = 3$ رسم کنید. برای این منظور، بر روی محور طول‌ها مقادیر برآورد میانگین جامعه، یعنی $\bar{x}$ را مشخص کنید. حال احتمال مشاهده هر یک از مقادیر را در نمودار علامت بزنید. این کار برای اندازه‌ی نمونه‌های مختلف انجام شده است. هر نمودار مربوط به اندازه نمونه‌ی به‌خصوص $n = 1,2,3,4,5,6$ است.

اگر برآورد را براساس نمونه‌ای به اندازه‌ی ۳ محاسبه کنیم، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر باشد، نسبت $n = 1,2$ بیشتر است. آیا اگر اندازه‌ی نمونه بیشتر از ۳ شود، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود، باز هم بیشتر می‌شود؟ بله زمانی که اندازه‌ی نمونه به ۶ می‌رسد، برآورد برابر ۲/۵ می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۱۲۱

به فعالیت ابتدای درس باز می‌گردیم. اگر از مطالعات سال‌های گذشته بدانیم که انحراف معیار درآمد هر فرد در کشور ۲ میلیون تومان است انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه را برای اندازه‌ی نمونه‌های ذکر شده محاسبه کنید.

n	۲۵	۱۰۰	۱۰۰۰۰
$\sigma_{\bar{x}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۲۰۰۰۰۰۰}{۵} = ۴۰۰۰۰۰$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۲۰۰۰۰۰۰}{۱۰} = ۲۰۰۰۰۰$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۲۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰} = ۲۰۰۰۰$

– انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه با نمونه‌ی ۱۰۰ نفری چند برابر انحراف معیار با نمونه‌ی ۱۰۰۰۰ نفری است؟ ۱۰ برابر $\frac{۲۰۰۰۰۰}{۲۰۰۰۰} = ۱۰$

– اگر اندازه‌ی نمونه ۱۰ برابر شود، انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می‌شود؟

دیدیم با ۱۰۰ برابر شدن اندازه‌ی نمونه، انحراف معیار برآورد میانگین ۱۰ برابر می‌شود بنابراین با ۱۰ برابر شدن اندازه‌ی نمونه انحراف معیار $\sqrt{۱۰}$ برابر خواهد شد.

فعالیت صفحه ۱۲۲

د رفعالیت قبل میانگین داده‌ها ۲/۵ محاسبه می‌شود؛ یعنی برآورد میانگین جامعه ۲/۵ به دست آمده است. چقدر به این برآورد اطمینان داریم؟ برای یافتن پاسخ این سوال به یاد آورید که دقت برآورد میانگین جامعه به اندازه‌ی نمونه و انحراف معیار بستگی داشت. اگر اندازه‌ی نمونه زیاد می‌شد، یا انحراف معیار کم بود، دقت برآورد میانگین بیشتر می‌گردید.

اگر یک نمونه به اندازه‌ی چهار داشته باشیم یک فاصله اطمینان برای میانگین جامعه محاسبه کنید.

مشاهدات ۱ ، ۲ ، ۵ ، ۰

میانگین نمونه : $\bar{x} = \frac{۱+۲+۵+۰}{۲} = ۲$

انحراف معیار نمونه : $\sigma = ۱/۸۷$

$۰/۱۳ < M < ۳/۸۷$

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \le M \le \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ۲ - \frac{۲\times ۱/۸۷}{۲} < M < ۲ + \frac{۲\times ۱/۸۷}{۲} \Rightarrow ۰/۱۳ < M < ۳/۸۷$$

کار در کلاس صفحه ۱۲۲

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی در یک ماه به ازای هر نفر مورد نیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین درآمد افراد جامعه. براساس داده‌های فعالیت اول خط فقر را برآورد کنید. انحراف معیار جامعه را برآورد کنید. اگر فرض کنیم که انحراف معیار به دست آمده انحراف معیار جامعه است، یک برآورد فاصله‌ای برای خط فقر محاسبه کنید.

$$\sigma^۲ = \frac{(۴-۲/۵)^۲ + (۱-۲/۵)^۲ + (۰-۲/۵)^۲ + (۳-۲/۵)^۲ + (۵-۲/۵)^۲ + (۲-۲/۵)^۲}{۶}$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۱/۷۵)^۲ + (-۱/۵)^۲ + (-۲/۵)^۲ + (۰/۵)^۲ + (۲/۵)^۲ + (-۰/۵)^۲}{۶}$$

$$\sigma^۲ = \frac{۳/۲۵ + ۲/۲۵ + ۶/۲۵ + ۰/۲۵ + ۶/۲۵ + ۰/۲۵}{۶} = \frac{۱۷/۵}{۶} = ۳ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۳}$$

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \le M \le \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ۲/۵ - \frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}} \le M \le ۲/۵ + \frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}} \Rightarrow ۲/۵ - \sqrt{۲} \le M \le ۲/۵ + \sqrt{۲}$$

کار در کلاس صفحه ۱۲۴

یک موسسه نظرسنجی معتبر، یک روز قبل از برگزاری انتخابات ریاست‌جمهوری، از یک نمونه‌ی ۱۰۰۰ نفری از واجدان شرایط، که به طور تصادفی از کل کشور انتخاب شده‌اند، پرسیده است که «آیا د رانتخابات شرکت خواهید کرد؟» اگر جواب ۷۰۰ نفر مثبت بوده باشد، یک بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی برای شرکت‌کنندگان در انتخابات به دست آورید.

حل : در این مسئله $n = ۱۰۰۰$ و $p = \frac{m}{n} = \frac{۷۰۰}{۱۰۰۰} = ۰/۷$. باید عبارت زیر را نیز محاسبه کنیم :

$$۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}} = ۲\sqrt{\frac{۰/۷-(۱-۰/۷)}{۱۰۰۰}} = ۰/۰۲۹$$

$$p - ۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}} \text{ و } p + ۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}} \Rightarrow ۰/۷ - ۰/۰۲۹ \text{ و } ۰/۷ + ۰/۰۲۹ \Rightarrow (۰/۶۷۱,۰/۷۲۹)$$

پس با اطمینان ۹۵ درصد مشارکت در انتخابات بین ۶۷/۱ درصد و ۷۲/۹ درصد خواهد بود.

تمرین صفحه ۱۲۵

۱-در اولین کار در کلاس، جداول را برای نمونه‌گیری تصادفی ساده به اندازه‌ی ۴ و ۵ تشکیل داده و مقادیر $\bar{x}$ را در مقابل احتمال مشاهده‌ی هر مقدار، محاسبه و در جدولی بنویسید.

اندازه‌ی ۴:

نمونه	{۰,۱,۲,۳}	{۰,۱,۲,۴}	{۰,۱,۳,۴} {۰,۱,۲,۵}	{۰,۲,۳,۴} {۰,۱,۳,۵}	{۰,۱,۴,۵} {۰,۲,۳,۴} {۰,۲,۳,۵}
$\bar{x}$	۱/۵	۱/۷۵	۲	۲/۲۵	۲/۵
احتمال	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$
نمونه	{۰,۲,۳,۵} {۰,۲,۴,۵}	{۱,۲,۴,۵} {۰,۳,۴,۵}	{۱,۳,۴,۵}	{۲,۳,۴,۵}	
$\bar{x}$	۲/۷۵	۳	۳/۲۵	۳/۵	
احتمال	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	

اندازه‌ی ۵:

نمونه	{۰,۱,۲,۳,۴}	{۰,۱,۲,۳,۵}	{۰,۱,۲,۴,۵}	{۰,۱,۳,۴,۵}	{۰,۲,۳,۴,۵}	{۱,۲,۳,۴,۵}
$\bar{x}$	۲	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳
احتمال	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

۲-از اعداد ۰ تا N، ۱۰ عدد به تصادف انتخاب شده است. اگر اعداد انتخابی به صورت زیر باشند با دو روش مختلف N را برآورد کنید.

۵	۸	۹	۱۱	۱۲	۳	۷	۵	۲	۹

نمونه	۲	۳	۵و۵	۷	۸	۹و۹	۱۱	۱۲
$\bar{x}$	۲	۳	۵	۷	۸	۹	۱۱	۱۲
احتمال	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۲}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۲}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$

۳-رئیس یک دانشگاه علاقه‌مند است متوسط سن دانشجویانی که در سال جاری ثبت‌نام کرده‌اند را بداند. برای این منظور، او یک نمونه‌ی تصادفی از سن ۲۵ دانشجو را انتخاب می‌کند. میانگین سن آنها برابر ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی‌های گذشته انحراف معیار طول قد دانشجویان این دانشگاه برابر ۱/۹ سال باشد، بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سن جامعه را محاسبه کنید.

$\bar{x} = ۲۲ \qquad \bar{x} - ۲\sigma \le M \le \bar{x} + ۲\sigma$

$\sigma = ۱/۹ \qquad ۲۲ - ۳/۸ \le M \le ۲۲ + ۳/۸$

$۲\sigma = ۳/۸ \qquad ۱۸/۲ \le M \le ۲۵/۸$

۴-طول فاصله‌ی اطمینان، برابر تفاضل حدّ بالا و پایین بازه‌ی اطمینان است.

الف) اگر در فرمول بازه اطمینان اندازه‌ی نمونه افزایش یابد، طول فاصله‌ی اطمینان کاهش می‌یابد. چرا؟ زیرا دقت برآورد افزایش می‌یابد.

ب) اگر در فرمول بازه اطمینان انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله‌ی اطمینان افزایش می‌یابد. چرا؟ زیرا دقت برآورد کاهش می‌یابد.

۵-داده‌های زیر نمرات ۲۴ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

۷۵ ۷۴ ۷۳ ۷۱ ۷۱ ۷۰ ۶۷ ۷۵

۷۹ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۷ ۷۵ ۸۰

۸۷ ۸۶ ۸۶ ۸۳ ۸۲ ۸۲ ۸۱ ۹۱

الف) میانگین و انحراف معیار نمرات را محاسبه کنید.

$$\bar{x} = \frac{(۷۵ \times ۳) + ۷۴ + ۷۳ + (۷۱ \times ۲) + ۷۰ + ۶۷ + ۷۹ + (۷۸ \times ۴) + ۷۷ + ۸۰ + ۸۷ + (۸۶ \times ۲) + ۸۳ + (۸۲ \times ۲) + ۸۱ + ۹۱}{۲۴}$$

$\bar{x} \simeq ۷۸ \qquad \sigma = ۵/۵$

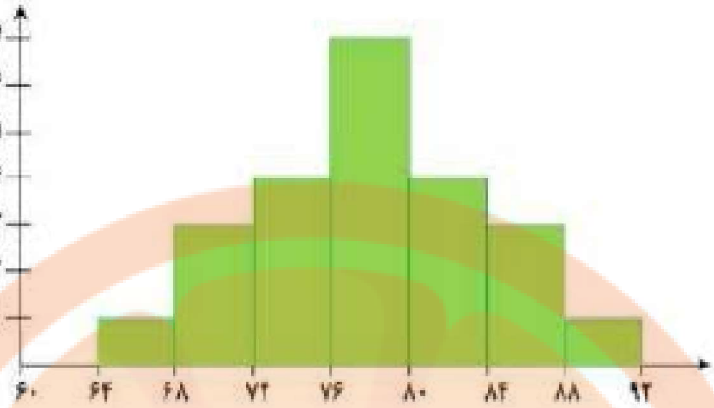
ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات جامعه محاسبه کنید.

$\bar{x} - ۲\sigma \le M \le \bar{x} + ۲\sigma \Rightarrow ۷۸ - ۱۲ \le M \le ۷۸ + ۱۲ \Rightarrow ۶۶ \le M \le ۹۰$

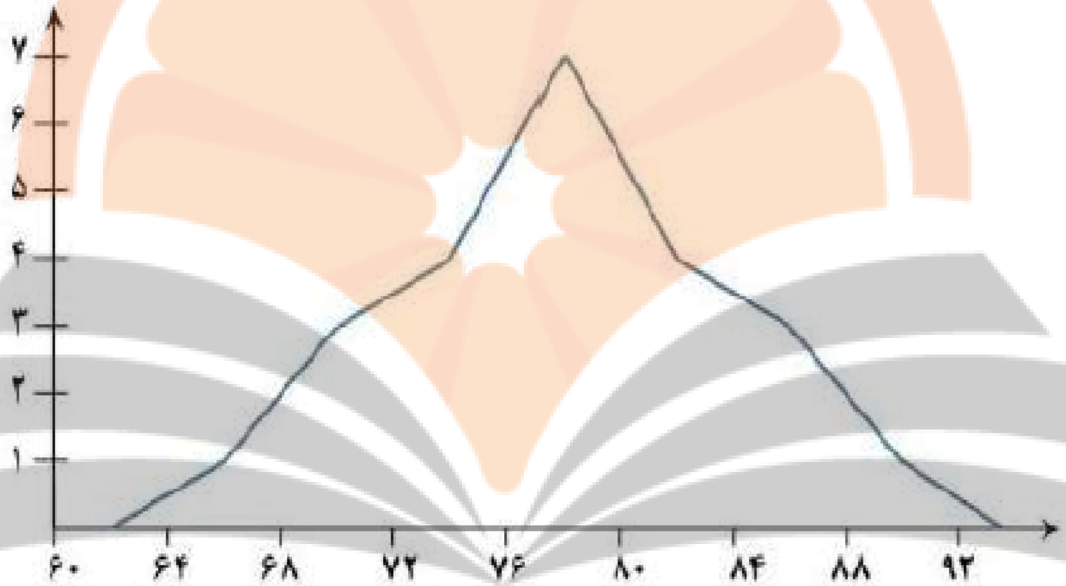
پ) چند درصد داده‌ها داخل این بازه قرار می‌گیرند؟

$\frac{۲۳}{۲۴} \times ۱۰۰ = ۹۵\%$

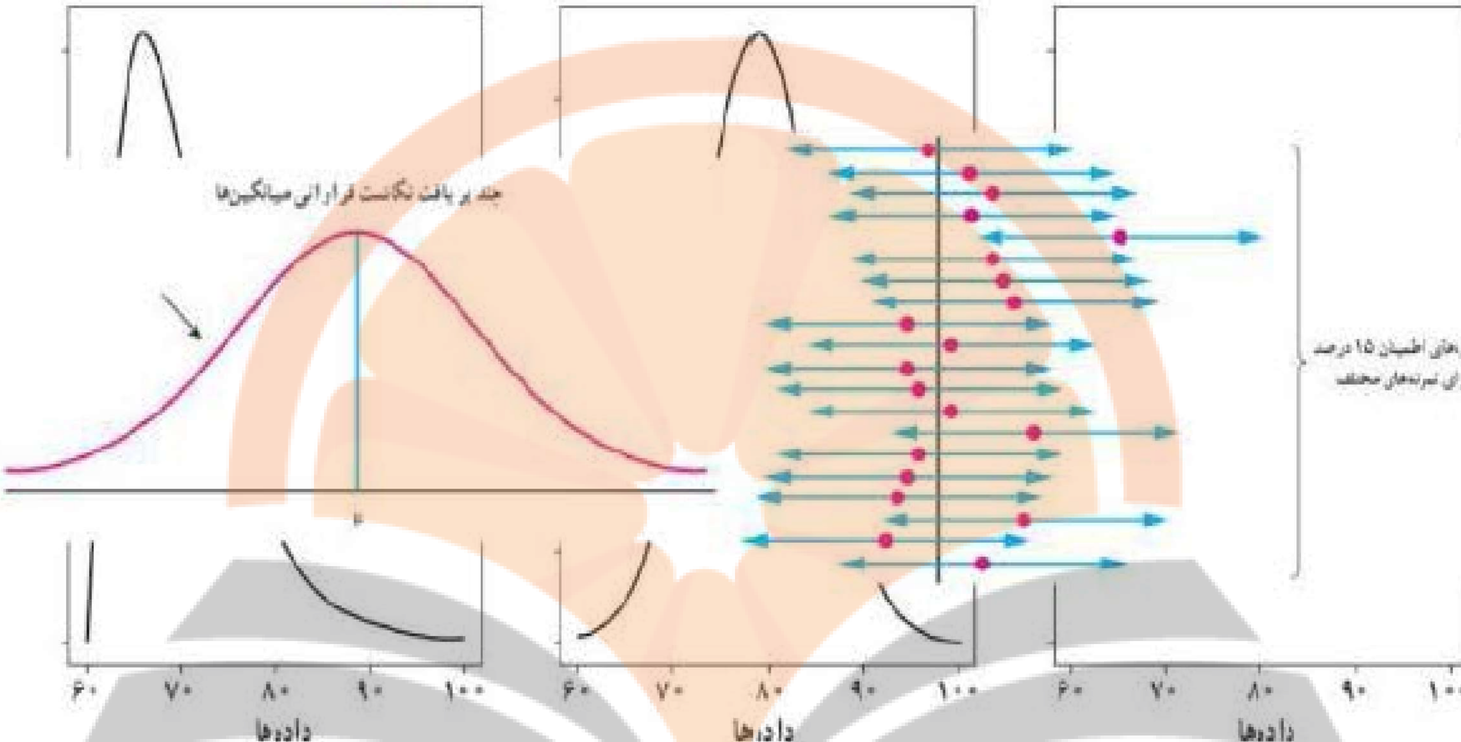
ت) بافت نگاشت فراوانی داده‌ها را رسم کنید. (در فواصل [۶۷,۷۱] و [۷۱,۷۵] و ...)



ث)چندبر فراوانی بافت نگاشت را رسم کنید. (وسط مستطیل‌ها را با پاره‌خط به هم متصل کرده و به محور طول‌ها وصل کنید.)



ج)اگر داده‌ها زیاد شوند، به نظر شما شکل چندبر فراوانی بافت نگاشت به کدام‌یک از نمودارهای زیر شباهت بیشتری خواهد داشت؟ (نام نمودارها به ترتیب : یکنواخت، نرمال، نامتقارن یا چوله است.) نرمال



۶-اگر در سؤال قبل ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم؛ یعنی ۱۰۰ دفعه نمونه‌ای به اندازه‌ی ۲۴ بگیریم و چند بر فراوانی بافت نگاشت ۱۰۰ میانگین را رسم کنیم می‌توان نشان داد که تقریباً به صورت یک منحنی به شکل زیر است (توجه کنید منظور از ۱۰۰ عددی بزرگ است، ۱۰۰ یک مثال است). در این شکل μ نشان دهنده‌ی میانگین جامعه است، که در اینجا میانگین نمرات همه‌ی دانش‌آموزان است، که مجهول است. حال فرض کنید برای ۱۰۰ نمونه‌ی ۲۴ تایی، ۱۰۰ بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی محاسبه کرده‌ایم. در زیر نمودار نرمال ۲۰ تا از آنها رسم شده است. نقاط قرمز رنگ نشان دهنده‌ی میانگین نمونه و پاره‌خط‌های افقی آبی معرف فاصله‌ی اطمینان مربوطه اند. خط سیاه عمودی میانگین جامعه را مشخص کرده است.

الف) اگر پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع نکند، چه نتیجه‌ای باید گرفت؟

اگر پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع کند نشان دهنده‌ی این است که میانگین جامعه در بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی وجود ندارد و بنابراین نمونه‌ی درستی انتخاب نشده است.

ب) چند درصد از ۲۰ پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع کرده‌اند؟

۱۹ پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع کرده‌اند بنابراین :

$$\frac{۱۹}{۲۰} \times ۱۰۰ = ۹۵\,\%$$

پ) اگر ۱۰۰ پاره‌خط آبی را رسم می‌کردیم، انتظار داشتید چند تا از آنها خط سیاه را قطع نکنند؟

با توجه به اینکه ۹۵ درصد خطوط را قطع می‌کند پس با رسم ۱۰۰ پاره‌خط آبی، ۵ تا از آنها خط سیاه را قطع نمی‌کنند.

ت) نتیجه این تمرین تعبیر یک بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد است. اگر ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم و ۱۰۰ بازه‌ی اطمینان محاسبه کنیم انتظار داریم ٪ ۹۵ از آنها پارامتر میانگین جامعه را در برگیرند.

۷-شاخص بوسیدگی دندان (DMFT) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی به طور متوسط هر ایرانی دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پرشده است. براساس نمونه‌ای به اندازه‌ی ۴۰۰، این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است ($\bar{x}$ = ۲). اگر انحراف معیار دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پر شده به ترتیب برابر ۱، ۲ و ۱/۶ باشد. بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پر شده محاسبه کنید.

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای دندان‌های کشیده شده :

$$\bar{x} - ۲\,\sigma\sqrt{n} \leq M \leq \bar{x} + ۲\,\sigma\sqrt{n} \Rightarrow ۲ - ۲(۱)\sqrt{۴۰۰} \leq M \leq ۲ + ۲(۱)\sqrt{۴۰۰} \Rightarrow -۳۸ \leq M \leq ۴۲$$

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای دندان‌های پوسیده شده :

$$۲ - ۲(۲)\sqrt{۴۰۰} \leq M \leq ۲ + ۲(۲)\sqrt{۴۰۰} \Rightarrow -۷۸ \leq M \leq ۸۲$$

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای دندان‌های پر شده :

$$۲ - ۲(۱/۶)\sqrt{۴۰۰} \leq M \leq ۲ + ۲(۱/۶)\sqrt{۴۰۰} \Rightarrow -۶۲ \leq M \leq ۶۶$$

۸-پارامتر میانگین جامعه را با چه آماره‌های می‌توان برآورد کرد؟ (۵ آماره نام ببرید)

با آمارهای میانگین - میانه - مدار فراوانی نسبی و فاصله اطمینان

۹-پارامتر واریانس و انحراف معیار جامعه را با چه آمارهایی می‌توان برآورد کرد؟

با آمار واریانس و انحراف معیار نمونه‌ی تصادفی از یک جامعه

۱۰-در فصل قبل با چه آماره‌های آشنا شده‌اید؟ آنها چه پارامترهای را برآورد می‌کردند؟

در فصل قبل با آمار فراوانی نسبی نمونه آشنا شدیم که با استفاده از آن می‌توان فراوانی نسبی جامعه را برآورد کرد.

۱۱-مدیر تولید یک روزنامه می‌خواهد درصد روزنامه‌های معیوب را بررسی کند. برای این منظور، ۱۰۰ روزنامه به تصادفی انتخاب می‌شود که ۱۶ تا از آنها معیوب است. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪ برای درصد روزنامه‌های معیوب محاسبه کنید. اگر بخواهیم طول بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی، برابر یک درصد باشد باید n را چقدر انتخاب کنیم؟

$$\begin{cases} n = ۱۰۰ \\ m = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \quad p = \frac{m}{n} = \frac{۱۶}{۱۰۰} = ۰/۱۶$$

$$\left(p - ۲\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ و } p + ۲\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = \left(۰/۱۶ - ۲(۰/۰۳۶) \text{ و } ۰/۱۶ + ۲(۰/۰۳۶)\right)$$

$$\Rightarrow \left(۰/۰۸۸ \text{ و } ۰/۲۳۲\right)$$

$$\text{طول بازه اطمینان} = \frac{۲}{\sqrt{n}} = ۰/۰۱ \quad \Rightarrow n = ۴۰۰۰۰$$

۱۲-مثال های این درس را با اندازه‌ی نمونه های مختلف حل کنید. چه نتیجه‌هایی می‌توان گرفت؟ (مقدار برآورد تغییر نمی‌کند.)

با اندازه‌های نمونه مختلف نیز مقدار برآورد تغییر نمی‌کند.