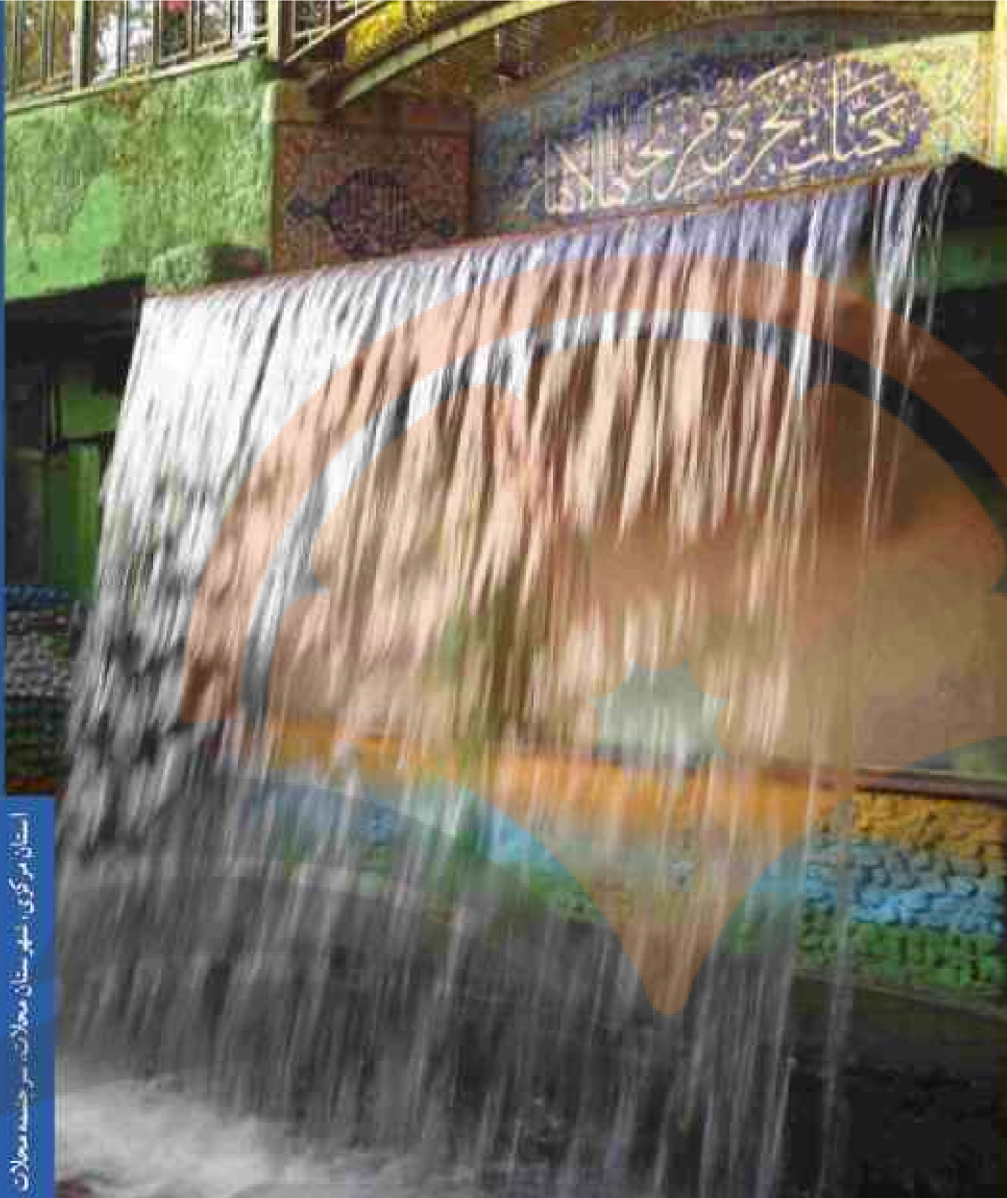


استان مرکزی، شهرستان محلات، سرچشمه محلات

«قُل هاتوا بُرهانَکُم اِن کُنتُم صادِقین»
آیه ۶۴ سوره نمل
«بگو اگر راست می‌گویید
دلیل خود را بیاورید»

۱ آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ آشنایی با منطق ریاضی

۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها ـ جبر مجموعه‌ها

حل کاردرکلاس ها و فعالیت ها به همراه

پاسخ تمرین های فصل اول کتاب آمار و احتمال

رشته ی ریاضی فیزیک

چاپ تابستان ۱۳۹۶

گروه ریاضی استان خوزستان

تهیه و تنظیم : افشین ملاسعیدی

هزینه ی استفاده، صلواتی جهت سلامتی امام زمان (عج)

مقدمه :

فایلی که در اختیار شما قرار گرفته توسط اینجانب – افشین ملاسعیدی – در تیرماه ۱۳۹۶ نوشته و تنظیم شده است و امیدوارم دارای کمترین خطا بوده و مفید فایده برای شما باشد .

از همکاران ذیل ، اساتید محترم آقایان **عزیز عسکری** ، **احمد عامری** ، **عبدالامیر عباس زاده** ، **جابر عامری** و خانم ها **ژیلا باقری** و **آزاده حاجی هاشمی** که در تهیه ی این مجموعه با من همکاری داشته اند کمال تشکر می نمایم .

از همکاران عزیز تقاضا می کنم در صورت مشاهده ی هر گونه اشتباه اعم از علمی یا تایپی بنده را مطلع ساخته تا در جهت رفع آن اقدام نموده و بتوانم از تجربیات شما استفاده کنم .

جهت ارتباط می توان به یکی از دو روش زیر عمل کرد :

۱- تلگرام : @sinxcosx

۲- همراه : 09168324500

ایرادات و اشکالات تایپی مربوط به فصل اول

۱- مطرح کردن بعضی از سوالات ریاضی در سطح دانش آموزان پایه ۱۱ درست نیست . که بعضاً یافتن جواب آنها بسیار وقت گیر یا غیر ممکن می باشد .

به طور مثال صفحه ۴ خط سوم : ■ هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

۲- صفحه ی ۴ : شایسته بود با توجه به تصویر حلزونی عدد π ، در گزاره ی ■ **صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.**

به جای صدمین ، پنجمین یا آنچه در شکل قابل رویت بود ، نوشته می شد .

۳- در مثال صفحه ی ۱۰ اشتباه تایپی وجود داشته که بهتر است اصلاح شود :

مثال : ارزش گزاره «اگر ۲ فرد است آن‌گاه ۵>۲» به انتفای مقدم ~~نادرست~~ است. درست است .

۴- در صفحه ۱۵ ، قسمت آموزش نقیض گزاره بهتر است در انشای متن ، تغییر زیر صورت گیرد :

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید و نقیض آن را بنویسید.
هر آسیایی، ایرانی است.
....

⇐

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید می خواهیم نقیض آن را بنویسیم.
هر آسیایی، ایرانی است.

۵- صفحه ی ۲۵ تمرین ۱۲ اثبات یکی از دو قسمت الف یا ب کافیست و لزومی به خواستن اثبات هر دو نبود .

۶- صفحه ی ۲۶ ، فعالیت ۱ ، اصلاح زیر انجام شود :

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (د) از دو رنگ استفاده کنید). (ت)

۷- صفحه ی ۲۸ کاردرکلاس ۱ ، نوشته نشده که چه چیز را می خواهد ثابت کند . باید به صورت زیر تکمیل گردد:

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم : $A \cup B = B \cup A$

همچنین در صفحه ی ۲۸ کار در کلاس ۳ ، باید تغییر زیر صورت گیرد :

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A \cup B) \cap \cancel{(B \cup C)} \subseteq A \cup (B \cap C)$ $(A \cup C)$

۸- صفحه ی ۳۷ ، کار درکلاس الف : بدون هیچ مقدمه ای از برهان خلف استفاده کرده !!!!
دانش آموز در چه مرحله ای با این نوع برهان آشنا شده است ؟!

۹- صفحه ی ۳۸ ، تمرین ۱ : بهتر بود در متن سوال ، به همراه ترکیب عطفی ، اشاره ای نیز به استفاده از ترکیب فصلی نیز می شد .

۱۰- صفحه ی ۳۸ تمرین ۳ ، قسمت الف : نوشتن $X \cup Y \cap Z$ صحیح نیست وباید حتماً به صورت $(X \cup Y) \cap Z$ یا $X \cup (Y \cap Z)$ باشد
البته بنده به صورت زیر اصلاح کرده و پاسخ داده ام :

$$(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A) \Leftarrow (A' \cap B) \cup \left([(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)\right)$$

ضمن تشکر از زحماتی که مولفین محترم ، متحمل شده اند ، امیدوارم قبل از چاپ

اولین نسخه ی کتاب ایرادات فوق برطرف گردد .

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۱ آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین[۱] نیز می‌گویند؛ دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به‌کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق **استدلال‌ها می‌پردازد** و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به‌کار گرفته می‌شود. در این درس کار ما بسیار شبیه به بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معین است.

گزاره

استدلال سادهٔ زیر را در نظر بگیرید:

تیم ملی فوتبال ایران یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی می‌رود.

تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی نمی‌رود.

نتیجه: تیم ملی فوتبال ایران به جام‌جهانی می‌رود.

این استدلال از چند جملهٔ خبری به‌دست می‌آید، چنانچه دو جملهٔ اول این استدلال را درست درنظر بگیریم، در این صورت نتیجه‌گیری جملهٔ سوم منطقی به نظر می‌رسد. در منطق ریاضی به دو جملهٔ خبری نخست، **مفروضات استدلال** و به جملهٔ خبری سوم، **نتیجه استدلال** گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جملهٔ خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه، مفروضات استدلال هستند.

کار در کلاس

نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱ هیچ عدد مرکّبی، عددی اول نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه: **۴ عدد اول نیست**

۱_ Symbolic Logic

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد آن‌گاه مدارس تعطیل است.
فردا وضعیت آلودگی هوا به‌صورت ناسالم پیش‌بینی شده است.
نتیجه : فردا مدارس تعطیل است

این استدلال‌ها، از جمله‌های خبری تشکیل شده است. به **جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره[1] می‌گوییم**. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p، q، r و ... نمایش می‌دهند.

درست[2] یا نادرست[3] بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است. برای مثال گزاره زیر یک حدس در ریاضیات است.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت[4]»

مانند :

۴=۲+۲ ; ۶=۳+۳ ; ۸=۳+۵ ; ۱۰=۵+۵ ; ۱۲=۵+۷ ; ...

این حدس تاکنون اثبات نشده است؛ از طرفی مثال نقضی هم برای آن یافت نشده است. در هر صورت این گزاره فقط دارای یک ارزش است. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس نادرست است.

خواندنی

حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای می‌گویند که پرونده آنها در جهان علم باز است. این‌گونه مسائل علاوه‌بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است، تاکنون مثال نقضی هم برای آنها پیدا نشده است، حدس گلدباخ نمونه‌ای از این مسائل است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

کار در کلاس

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

- ایران کشور آسیایی است. **گزاره ای درست است**
- در پرتاب یک تاس احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید برابر با $\frac{1}{3}$ است. **گزاره ای درست است**

۱ــ Proposition ۲ــ Truth ۳ــ False

۴ــ حدس گلد باخ

- ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم. **گزاره نیست**
- آیا ۲+۳ برابر با ۵ است؟ **گزاره نیست**
- هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اول نوشت.
گزاره است ولی ارزش آن مشخص نیست
- هر معادله درجه دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است. **گزاره ای نادرست است**
- صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است. **گزاره ای نادرست است**

جدول ارزش[1] گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه‌رو می‌گیرد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزاره p و q، طبق جدول روبه‌رو دارای ۴ حالت است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

کار در کلاس

ارزش‌های سه گزاره p، q و r، طبق جدول روبه‌رو دارای $8=2^3$ حالت است.
جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

ــ به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، دارای چند حالت است؟ **$2^4=16$ حالت دارد**

ــ با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها دارای چند حالت است؟ **2^n حالت دارد**

۱ــ Truth Table

گزاره‌نما

فعالیت

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید :

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{1}{2}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. $(3x+2y=6)$

۱ ارزش کدام‌یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟ **ارزش هیچکدام را نمی توان تعیین کرد**

۲ چنانچه به جای متغیر در جملهٔ «a عددی فرد است» قرار دهیم $a=3$ در این صورت ارزش آن را تعیین کنید؟ **درست است**

اگر در آن $a=4$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟ **نادرست است**

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید :

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{1, 2, 3\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به‌جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

هر زیر مجموعه ی سه عضوی از مجموعه ی اعداد ۱ تا ۶ ، را اگر قرار دهیم ارزش گزاره درست است .

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{1\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جملهٔ «پ» قرار دهیم $x=2$ و $y=0$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x=0$ و $y=2$ در این صورت ارزش گزاره حاصل نادرست است.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا اینکه گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، **دامنهٔ متغیر**[1] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

برای مثال، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «p عددی اول است» مجموعهٔ اعداد طبیعی، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «x عددی زوج است» مجموعهٔ اعداد صحیح و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$4x^2+x-5=0$» مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توان درنظر گرفت.

در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به‌ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب**[2] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم : $S \subseteq D$.

۱ـ Domain of Variable ۲ـ Answer Set

کار در کلاس

دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. ($D=\mathbb{Z}$) $S=\{0, \pm 7, \pm 14, \ldots\}$

ب) $15x^2-7x-8=0$ ($D=\mathbb{R}$) $S=\left\{1, -\frac{8}{15}\right\}$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\})=\frac{1}{6}$. ($D=\{1,2,\ldots,6\}$) $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

ترکیب گزاره‌ها

فعالیت

۱ هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به‌کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .
- عدد ۲ زوج است یا عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .
- چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد. یک گزاره با ارزش نادرست است.
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آیند.

در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و معرفی ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره p درست باشد در این‌صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت «~» ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال : نقیض گزاره «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به‌صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد» یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به‌صورت روبه‌رو است :

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

حل :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است، در این حالت می‌گوییم دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ **هم ارز منطقی** هستند و می‌نویسیم : $\sim(\sim p) \equiv p$.

در حالت کلّی اگر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم p هم ارز است با q.

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزاره مرکب « $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p یا q» را که به‌صورت «$p \vee q$» می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\vee$» فاصل گفته می‌شود. گزارهٔ مرکب زیر را در نظر بگیرید :

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید یا مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید.»

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزاره مرکب بالا درست است. چنانچه مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری که $a \times b = ۰$ در این صورت $a = ۰$ یا $b = ۰$ یعنی :

$$a, b \in \mathbb{R}\ ,\ a \times b = ۰ \Rightarrow (a = ۰) \vee (b = ۰)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله‌ها استفاده می‌کنیم :

$$x^۲ + ۷x = ۰ \Rightarrow x(x+۷) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = -۷$$

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p \wedge q$» که خوانده می‌شود «p و q» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\wedge$» عاطف گفته می‌شود.

فعالیت

گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

- آیا ارزش این گزارهٔ مرکب درست است؟ ارزش آن بستگی به ارزش گزاره های تشکیل دهنده ی آن دارد.

فرض کنید:

p : سوگند فارغ‌التحصیل شد.

q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

- چنانچه ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ نادرست
- چنانچه ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ نادرست
- هرگاه ارزش دو گزارهٔ p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ نادرست
- هرگاه ارزش دو گزارهٔ p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ درست

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p \wedge q$ به‌صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	د	د	د	د
در تیر ماه هوای آبادان سرد است.	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است	۲+۳=۷	د	ن	د	ن
هر ماه ۳۰ روز دارد.	۵<۱	ن	ن	ن	ن
(۷-) اول است	۹ عددی مرکب است	ن	د	د	ن

۲ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم ارز هستند

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش دو گزاره $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان هستند پس $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$
به این هم‌ارزی **قانون دمورگان** در منطق ریاضی گفته می‌شود.

۳ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم ارز هستند

مثال : مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم :

$$(2x-y)^2+(x-1)^2=0$$

حل : چون $(x-1)^2\geq 0$ و $(2x-y)^2\geq 0$ بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که :

$$\left[(2x-y)^2=0\right] \quad \left[(x-1)^2\right] \quad 0= \quad \begin{cases} 2x-y=0 \\ \Rightarrow \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow y=2$$

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

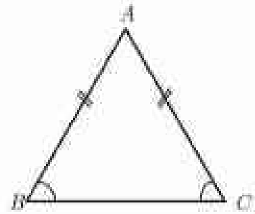
خواندنی

گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» را به‌صورت‌های «p شرط کافی برای q است» و «q شرط لازم برای p است» می‌خوانیم.

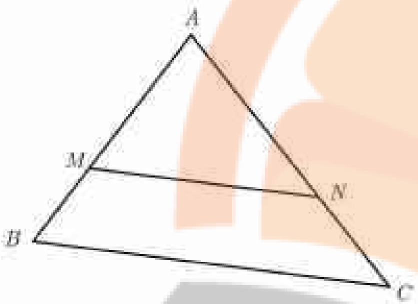
تا به‌حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.

۱ اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد. آن‌گاه دو زاویه مجاور به قاعده برابرند.

$\overset{\Delta}{ABC}: AB=AC \Rightarrow \hat{B} \quad \hat{C}$



۲ اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم $MN \| BC$ آن‌گاه $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$.



۳ $a^2 \le b^2 \Rightarrow (a \le b) \vee (a \ge -b)$

۴ $a^2 \ge b^2 \Rightarrow (a \ge b) \wedge (a \le -b)$

۵ اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد آن‌گاه $A \subseteq S$.

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به‌صورت زیر است.

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که :

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

۱ هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند ارزش «$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

۲ ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

مثال : ارزش گزاره «اگر ۲ فرد است آن‌گاه ۵>۲» به انتفای مقدم ~~نادرست است~~. درست است.

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی هستند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

۲ گزاره «$q \Rightarrow p$» **عکس ترکیب شرطی** «$p \Rightarrow q$» و گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ است.

با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	د

هم ارزند

۳ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید :

الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

(الف) هم ارز با T است.

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

(ب) هم ارز با T است.

گزاره‌هایی نظیر $p \Rightarrow p$ یا $p \vee \sim p$ را گزاره‌های همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر $p \wedge \sim p$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال : ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد آن‌گاه a عددی فرد است.

حل : به‌جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

(a^2 عددی فرد است $\Leftarrow a$ عددی فرد است) $\equiv$ (a عددی زوج است $\Leftarrow a^2$ عددی زوج است)

چنانچه a عددی زوج باشد، یعنی $a = 2k$، خواهیم داشت :

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} = 2k'$$

در نتیجه a^2 عددی زوج است.

ترکیب دو شرطیِ دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p\Leftrightarrow q$» می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره «$p\Leftrightarrow q$» را به‌صورت زیر می‌خوانیم :

«اگر p، آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» و «p اگر و تنها اگر q»

مثال : گزاره های زیر، نمونه ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

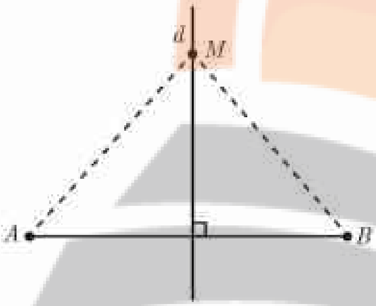
الف) ۶ عدد اول است $\Leftrightarrow$ ۵ < ۲

ب) ۹۹ عدد اول نیست $\Leftrightarrow$ $\sqrt{۲}$ عددی گویا است.

پ) در پرتاب یک تاس شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط باشد آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.

$[M\in d$ (عمود منصف پاره‌خط AB) $]\Leftrightarrow MA=MB$



کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزارهٔ مرکب «$p\Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزاره مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

با توجه به اینکه $(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$، جدول ارزش گزاره $p\Leftrightarrow q$ به‌صورت زیر است :

p	q	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲ با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی $p\vee q\equiv q\vee p$

$p\wedge q\equiv q\wedge p$

ب) قوانین شرکت‌پذیری $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

پاسخ این قسمت در صفحه ی بعد نوشته شده است.

پ) قوانین توزیع‌پذیری $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

سورها

به جملات زیر دقت کنید:

«همهٔ دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند». «هر گردو، گرد است». «هر مستطیل یک مربع است». «هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین است». «بعضی از تیم‌های دستهٔ یک به دسته برتر صعود می‌کنند». «بعضی از اعداد اول، زوج هستند». «بعضی از ذوزنقه‌ها، مستطیل هستند».

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به **سور** معروف هستند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

پاسخ تمرین ۲ صفحه ی ۱۳ کتاب درسی

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

الف) قوانین جابجایی :

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

ب)قوانین شرکت پذیری :

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(P \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(P \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(P \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(P \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

پ)قوانین توزیع پذیری :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

خواندنی

سور کلمه‌ای عربی است و به معنای «بارو» حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. نام‌گذاری عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» با سور به این جهت است که آنها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند. از نظر منطق‌دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به‌کار رفته در گزاره‌نماها، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نماها را تعیین می‌کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$[1] و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$[2] استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 \geq 0$
برای هر عدد زوج a داریم $a=2k \; (k \in \mathbb{Z})$	$\forall a \in E \; ; \; a=2k \; (k \in \mathbb{Z})$
وجود دارد عدد اول p بطوریکه $p=2k \; (k \in \mathbb{Z})$	$\exists p \in P \; ; \; p=2k \; (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists a \in O ; a \in P$

در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با E، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش داده‌ایم.

گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مثال: گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 \geq x$
نادرست است، زیرا $x=\frac{1}{2}$ برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند.

الف) $\forall x \in \mathbb{Z} \; ; \; x(x+1)=2k$ ب) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \tan x \times \cot x = 1$

حل الف) چون حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است بنابراین برای هر عضو از دامنه متغیر $(\mathbb{Z})$ گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

۱ــ نماد $\forall$ از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲ــ نماد $\exists$ از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

ب) نادرست است، زیرا $x=\frac{\pi}{2}$، گزاره نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

مثال : گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{Z} ; |x|-1<0$

درست است، زیرا حداقل یک عضو $x=0$ وجود دارد که به ازای آن گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند :

الف) $\exists x \in P ; x=2k$ ب) $\exists x \in \mathbb{R} ; x^2+1=0$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعهٔ جواب گزاره‌نما $\{2\}$ و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعه تهی است.

کار در کلاس

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است. نادرست است زیرا ۲ عددی اول ولی زوج است .

ب) $\exists x \in \mathbb{N} ; 2x^2+3x+1=0$ نادرست است ، زیرا به ازای هر $x \in \mathbb{N}$ عبارت $2x^2+3x+1$ مقداری طبیعی دارد و نمی تواند صفر شود .

پ) $\exists x \in \mathbb{Z} ; 2x^2+3x+1=0$ درست است و مجموعه جواب آن $\{-1\}$ و ناتهی است .

ت) هر عدد زوج، غیر اول است. نادرست است زیرا ۲ عدد زوج ولی اول است .

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است. درست است . زیرا طبق تعریف ، متغیر ترتیبی نوعی متغیر کیفی است .

ج) در احتمال؛ هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. طبق تعریف پیشامد ، درست می باشد .

چ) در فضای نمونه S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A)>1$. نادرست است زیرا همواره $P(A) \leq 1$ خواهد بود .

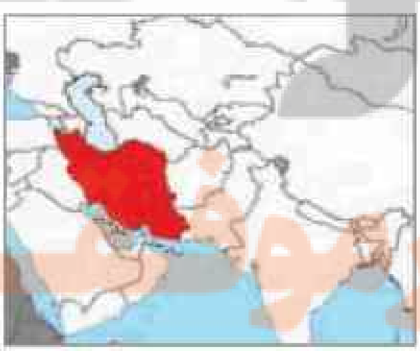
ح) طول هر پاره خط عدد حقیقی است. درست است

نقیض گزاره‌های سوری

گزاره «**علی به مدرسه رفت**» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید. "علی به مدرسه نرفت ."

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید می خواهیم نقیض آن را بنویسیم .

هر آسیایی، ایرانی است.



در زبان طبیعی معمولاً این اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض این گزاره، فقط فعل آن را منفی می‌کنند و می‌نویسند :

هر آسیایی، ایرانی نیست.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارزش دو گزاره قبل نادرست است و این غیر ممکن است (چرا؟) بنابراین جمله دوم نمی‌تواند نقیض جمله اول باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم A مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن x را با $P(x)$ نمایش دهیم؛ بنابراین گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت $\forall x \in A; P(x)$ بیان می‌شود.

چون ارزش این گزاره « $\forall x \in A; P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزاره نقیض آن یعنی $\sim(\forall x \in A; P(x))$ باید درست باشد. از آنجا که ارزش گزاره $(\forall x \in A; P(x))$ نادرست است، پس وجود دارد $x \in A$ به‌طوری که $P(x)$ نادرست است و لذا ارزش $\sim P(x)$ درست می‌باشد، در نتیجه ارزش گزارهٔ $\exists x \in A; \sim P(x)$ درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزارهٔ $\sim(\forall x \in A; P(x))$ یکسان است، بنابراین داریم :

$$\sim(\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

در این صورت نقیض گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به‌صورت زیر است :

«بعضی از آسیایی‌ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می‌توان نقیض گزاره‌ای را که دارای سور وجودی است، به صورت زیر نوشت :

$$\sim(\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

مثال : ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هریک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$ ب) $\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$

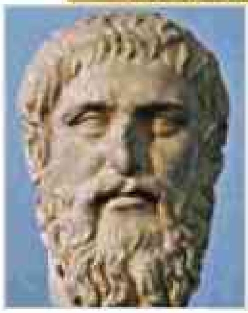
حل) الف) ارزش این گزاره نادرست است، چون $x=0$، مثالی نقض برای آن است.

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \not> 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$$

ب) درست است، زیرا $y=-1$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\begin{aligned}\sim(\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1) &\equiv \forall y \in \mathbb{R}; \sim(y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \\ &\equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1\end{aligned}$$

تمرین



۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است و ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است. **گزاره ی نادرست**

ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. **گزاره ی درست**

پ) ۳+۵>۶ **گزاره ی درست**

ت) تخته سیاه را پاک کنید. **گزاره نیست**

ث) $\{1\} \in \{1,2,3,4\}$ **گزاره ی نادرست**

ج) چه باران شدیدی می‌آید. **گزاره نیست**

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. **گزاره ی نادرست**

ح) $\varnothing \not\subset \mathbb{R}$ **گزاره ی نادرست**

خ) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ **گزاره ی نادرست**

د) عدد $5^{10}+8$ عددی اول است. **گزاره ی نادرست**

ذ) به امید کامیابی شما. **گزاره نیست**

ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **گزاره ی درست**

۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به‌طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-7 \times \boxed{1} = -7$

ب) $5+\boxed{0/1} \notin \mathbb{Z}$

پ) $\frac{8\times\boxed{1}}{4} \in \left\{2,\frac{1}{3}\right\}$

ت) $5\times 3 \boxed{>} \frac{10\times 9}{3}$

ث) $\boxed{0} \times \sqrt{2} = 0$

ج) $1 \boxed{\in} \{1\}$

چ) $5(\boxed{7}-3) = 20$

ح) $7(\boxed{8}-3)=35$

۳ دامنهٔ متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است $S=\{0,1,4,9,16,\dots\}$

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است. $S=\{\dots,-9,-4,1,6,\dots\}$

پ) $\frac{2x+1}{3} \le -1$ $\quad 2x+1 \le -3 \Rightarrow x \le -2 \Rightarrow S=\{-2,-3,-4,\dots\}$

ت) $\{n(n+1)=0 \mid n \in W\}$ $\quad S=\{0\}$

۴ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $4 \le 3$ $\quad$ **$4>3$**

ب) ابولوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی است. **ابولوفای بوزجانی ریاضی دان ایرانی نیست .**

پ) $a \in \{b,c,d\}$ $\quad a \notin \{b,c,d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویا است. **۲عددی زوج نیست وعدد π گویانیست**

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.
خورشید به دور زمین نمی چرخد یا سنندج مرکز استان کردستان نیست .

ج) اگر a زوج باشد آن‌گاه $a+1$ فرد است.

a زوج است و $a+1$ فرد نیست

"توجه داشت باشید که $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge (\sim q)$"

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(10=3+4)\wedge(3<2)$ $\quad T \wedge F \equiv F$

ب) $(x^2+1=0)\vee(3>5)$ $\quad T \vee F \equiv T$

پ) $(1\in\{2,3,4\}) \vee (\frac{3}{6} \neq \frac{1}{2})$ $\quad F \vee F \equiv F$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست. $\quad F \Rightarrow F \equiv T$

ث) در متوازی‌الاضلاع مفروض دو قطر با هم برابرند.
$F \Rightarrow T \equiv T$ $\quad F \Rightarrow F \equiv T$

ج) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است. $\quad F \Leftrightarrow F \equiv T$

چ) $-2<-3 \Leftrightarrow 3>2$ $\quad F \Leftrightarrow F \equiv T$

ح) اگر $a \in \{b\}$ آن‌گاه $a=b$ و بر عکس. $\quad F \Leftrightarrow F \equiv T$

۶ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p\Rightarrow q)$	ارزش $(p\wedge q)$
عدد ۲ زوج است.	**عدد ۲ اول است.**	د	د	د	د
عدد۳ فرد است.	$1 \nless 2$	د	ن	ن	ن
$2\in\{1,2\}$	**عدد ۱ اول است.**	د	ن	ن	ن
$2+3=7$	عدد ۷ اول است.	ن	د	د	ن

پاسخ این قسمت در صفحه ی
بعد نوشته شده است .

۷ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p\wedge\sim q$

ب) $\sim p\wedge p$

پ) $\sim p\vee p$

ت) $(p\vee q)\wedge\sim p$

ث) $(p\vee q)\Leftrightarrow q$

ج) $\sim p\Leftrightarrow\sim q$

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که :

الف) $p\Rightarrow p\equiv T$

ب) $p\vee F\equiv p$

پ) $p\wedge T\equiv p$

ت) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

ث) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$

ج) $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

چ) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

ح) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q$

۹ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\forall$، $\exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم $a^2<0$.

پ) همه اعداد اول فرد هستند.

ت) وجود دارد عدد صحیح مثبتی مانند x به‌طوری که $5<2x-1$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

ج) به‌ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^3=x$.

۱۱ هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid 0<x\leq 5\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x\in A; x+4=10$

ب) $\forall x\in A; x+2\leq 9$

پ) $\exists x\in A; x+3\leq 4$

ت) $\forall x\in A; x+1\geq 6$

۱۲ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-1}=x+1$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}; (2^{2^n}+1)\in P$

پ) $\forall x\in(-\infty,0); x-\frac{1}{x}\leq -2$

ت) $\exists y\in\mathbb{R}; \frac{y-3}{5}=0$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۷- الف)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

ب)

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
ن	د	ن

پ)

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
ن	د	د

ت)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن

ث)

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

ج)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۸- الف)

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

بنابراین $p \Rightarrow p \equiv T$ است.

ب)

p	F	$P \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

بنابراین $p \vee F \equiv p$ است.

پ)

p	T	$p \wedge T$
د	د	د
ن	د	ن

بنابراین $p \wedge T \equiv p$ است.

ت)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ است. ←

ث)

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین $p \wedge (q \vee p) \equiv p$ است.

ج)

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین $p \vee (q \wedge p) \equiv p$ است.

ج)

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د

بنابراین $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ است .

ح)

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ است .

❖❖

۹- به جای اثبات این حکم ، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم . یعنی نشان می دهیم :

برای هر عدد صحیح n اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه $n^۲$ مضرب ۳ نیست .

چنانچه n مضرب ۳ نباشد ، یعنی باقیمانده تقسیم آن بر ۳ برابر ۱ یا ۲ است . به عبارت دیگر :

$n = ۳k + ۱ \Rightarrow n^۲ = ۹k^۲ + ۶k + ۱ = ۳(۳k^۲ + ۲k) + ۱ \Rightarrow n^۲ = ۳k' + ۱ \Rightarrow$ مضرب ۳ نیست $n^۲$

$n = ۳k + ۲ \Rightarrow n^۲ = ۹k^۲ + ۱۲k + ۴ = ۳(۳k^۲ + ۴k + ۱) + ۱ \Rightarrow n^۲ = ۳k'' + ۱ \Rightarrow$ مضرب ۳ نیست $n^۲$

پس در هر صورت $n^۲$ مضرب ۳ نیست .

در نتیجه حکم سوال برقرار است .

❖❖

۱۰- الف) $\forall a\in \mathbb{N},(a\in E \vee a\in O)$ درست است زیرا اگر عدد زوج باشد ، فرد نخواهد بود و اگر عددی زوج نباشد فرد خواهد بود . در نتیجه در ترکیب فصلی یکی از گزاره ها درست و یکی نادرست است ، پس در کل درست است .

ب) $\exists a\in W, a^2<0$ نادرست است زیرا هیچ عددی وجود ندارد که مربع آن منفی شود به عبارت دیگر مجموعه جواب آن تهی است .

پ) $\forall a\in P, a\in O$ نادرست است زیرا به عنوان مثال نقض ، عدد ۲ اولی بوده ولی فرد نیست .

ت) $\exists x\in \mathbb{Z}^+, 1-2x>5$ نادرست است زیرا $1-2x>5 \Rightarrow x<-2$. یعنی x منفی است و هیچ عدد مثبتی در آن صدق نمی کند .

ث) $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}, x+\frac{1}{x}\ge 2$ نادرست است به عنوان نمونه $x=-1$ مثال نقض است زیرا $-1+\frac{1}{-1}=-2\not\ge 2$.

ج) $\exists x\in\mathbb{R}, x^2=x$ درست است زیرا مجموعه جواب آن $S=\{0,\pm 1\}$ ناتهی است .

۱۱- الف) نادرست است زیرا $x+4=10\Rightarrow x=-6\notin A$

ب) درست است زیرا $x+2\le 9\Rightarrow x\le 7\Rightarrow S=\{1,2,3,4,5\}=A$ یعنی تمام اعضای دامنه ی تغییر جواب هستند .

پ) درست است زیرا $x+3\le 4\Rightarrow x\le 1\Rightarrow S=\{1\}\neq\varnothing$

ت) نادرست است زیرا $x+1\ge 6\Rightarrow x\ge 5\Rightarrow S=\{5\}\neq A$. فقط برای یک عضو دامنه ی تغییر بر قرار است و اعدادی مثل ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ مثال نقض برای آن می باشند .

۱۲- الف) نادرست است زیرا برای $x=1$ تساوی داده شده ، تعریف نمی شود .

نقیض گزاره : $\exists x\in\mathbb{R}, \frac{x^2-1}{x-1}\neq x+1$

ب) نادرست است . در حالت $n=5$ عدد بدست آمده اول نیست ، زیرا بر ۶۴۱ بخش پذیر است .

نقیض گزاره : $\exists n\in\mathbb{N}, 2^{2^n}\notin P$

پ) نادرست است به عنوان نمونه $x=-1$ مثال نقض است زیرا $-1-\frac{1}{-1}=0\not\le 2$

نقیض گزاره : $\exists x\in(-\infty,0), x-\frac{1}{x}>-2$

ت) درست است . زیرا مجموعه جواب آن $S=\{3\}$ ناتهی است .

نقیض گزاره : $\forall y\in\mathbb{R}, \frac{y-3}{5}\neq 0$

۲ مجموعه ــ زیر مجموعه

یادآوری : در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید، برای مثال مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی به صورت زیر است :

$A=\{2, 3, 5, 7\}$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $A=\{x \in P \mid x<10\}$ نوشت که در آن P مجموعه اعداد اول است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعه A است، می‌نویسیم $2\in A$. از طرفی واضح است که $6\notin A$ یعنی عضو ۶ به مجموعه A تعلق ندارد.

کار در کلاس

۱ فرض کنید $A=\{a , b\}$، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\} \in A$ نادرست زیرا در مجموعه ی A عضوی به صورت $\{a\}$ وجود ندارد

ب) $\varnothing \in A$ نادرست زیرا در مجموعه ی A عضوی به صورت $\varnothing$ وجود ندارد

پ) $\{a\} \subseteq A$ درست است زیرا $a \in A$ است.

ت) $b \subseteq A$ نادرست است زیرا b مجموعه نیست و نمی تواند زیر مجموعه باشد.

ث) $a \in A$ درست است زیرا a درون مجموعه ی A است.

ج) $\{a , b\} \subseteq A$ درست است زیرا a, b هر دو عضو مجموعه ی A هستند.

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی هستند؟

الف) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2=9 \text{ و } 2x=4\}$ $\quad x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ و $2x = 4 \Rightarrow x = 2$ ، بنابراین هم زمان $x = 2$ و $x = \pm 3$ نمی تواند باشد در نتیجه مجموعه تهی است.

ب) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x+8=8\}$ $\quad x + 8 = 8 \Rightarrow x = 0$ ، بنابراین مجموعه برابر $\{0\}$ بوده و ناتهی است.

پ) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq x\}$ وجود ندارد عددی که با خودش برابر نباشد ، بنابراین مجموعه هیچ عضوی ندارد و تهی است.

ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2=7x\}$ $\quad x^2 = 7x \Rightarrow x = 0 \vee x = 7 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 7$ ، بنابراین مجموعه به صورت $\{7\}$ بوده و ناتهی است.

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m\} = \{-1, 0, 1\}$

$A=\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$D=\{a \in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C=\{k \in \mathbb{R} \mid k^2-1=0\} = \{-1, 1\}$

۴ با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$B \subseteq A \longrightarrow$ درست

$A \cap D \subseteq C \xrightarrow{A\cap D=\{1,2\}}$ نادرست

$B \subseteq C \cup A \xrightarrow{C \cup A=\{-2,-1,0,1,2\}}$ درست

$B \in A \longrightarrow$ نادرست

$B-D \subseteq A \xrightarrow{B-D=\{-1, 0\}}$ درست

$C \not\subseteq A \longrightarrow$ نادرست

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فعالیت

مجموعه $A=\{a, b, c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید. $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b, c\}$ از مجموعهٔ A را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم، چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $c \in B$ و b متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعه $\{a\} \subseteq A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیه زیرمجموعه‌های A را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

زیر مجموعه	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
کد زیر مجموعه	۰۰۰	۱۰۰	۰۱۰	۰۰۱	۱۱۰	۱۰۱	۰۱۱	۱۱۱

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم اول　رقم دوم　رقم سوم

۲　۲　۲ $\xrightarrow{\times}$ $۲^{۳} = ۸$

۴ فرض کنید $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول　رقم دوم　رقم سوم　رقم چهارم

۲　۲　۲　۲ $\xrightarrow{\times}$ $۲^{۴} = ۱۶$

۵ اگر $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ در این صورت با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول　رقم دوم　رقم سوم　رقم nام

۲　۲　۲　…　۲ $\xrightarrow{\times}$ ۲^{n}

فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با ۲^n است.

مثال : مجموعه $A=\{a, \{a\}, \varnothing\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های A را در یک مجموعه بنویسید.

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing\}, \{a,\{a\}\}, \{a,\varnothing\}, \{\{a\},\varnothing\}, \{a,\{a\},\varnothing\}\}$$

خواندنی

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.
چنانچه A دارای n عضو باشد در این صورت $P(A)$ دارای ۲^n عضو است.
اگر $A \subseteq B$ به‌طوری که $A \neq B$ آن‌گاه A زیرمجموعه محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید A چند عضوی است.

حل : فرض کنیم A دارای n عضو باشد، پس دارای ۲^n زیرمجموعه است، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، یعنی در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با $۲^n+۴۸$ است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای A اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید برابر است با $۲^{n+۲}$ است، بنابراین داریم :

$$۲^n+۴۸ = ۲^{n+۲} = ۲^n \times ۲^۲$$

$$\Rightarrow ۲^n+۴۸ = ۴\times ۲^n \Rightarrow ۴\times ۲^n - ۲^n = ۴۸$$

$$\Rightarrow ۳\times ۲^n = ۴۸ \Rightarrow ۲^n = ۱۶ = ۲^۴ \Rightarrow n=۴$$

در نتیجه مجموعه A، چهار عضوی است.

افراز یک مجموعه

فعالیت

۱ مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های A به غیر از $\varnothing$ را بنویسید.

$\{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \{a,b,c\}$

۲ از بین زیرمجموعه‌های ناتهی A که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با A شود. $\{c\} , \{a,b\}$

۳ همه جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به‌دست آورید. $\{a\} , \{b,c\}$ همچنین دو مجموعه ی $\{b\} , \{a,c\}$

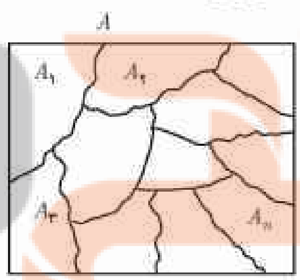
۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با A شود؟
بله $\{a\} , \{b\} , \{c\}$

فرض کنیم $A\neq\varnothing$ یک مجموعه و $A_۱ , A_۲ , \dots , A_n$ زیرمجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیرمجموعه $A_۱ , A_۲ , \dots , A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

I) $\forall\, ۱ \leq i \leq n\, ;\ A_i \neq \varnothing$

II) $\forall\, i , j\ (i\neq j\, ;\ A_i \cap A_j = \varnothing)$

III) $A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$



کار در کلاس

مجموعهٔ $A=\{۱ , ۲ , ۳ , \dots , ۹\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟

۱ $\{۱ , ۳ , ۵\}$ و $\{۲ , ۶\}$ و $\{۴ , ۸ , ۹\}$ افراز نیست زیرا ۷ درون هیچکدام قرار ندارد یعنی اجتماع آنها A نخواهد شد .

۲ $\{۱ , ۳ , ۵\}$ و $\{۲ , ۴ , ۶ , ۸\}$ و $\{۵ , ۷ , ۹\}$ افراز نیست زیرا عدد ۵ به عنوان عضو مشترک می باشد و در افراز نباید عضو مشترک وجود داشته باشد .

۳ $\{۱ , ۳ , ۵\}$ و $\{۲ , ۴ , ۶ , ۸\}$ و $\{۷ , ۹\}$ شرایط افراز برقرار است بنابراین افراز می باشد .

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

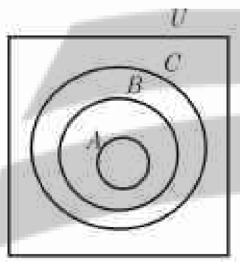
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B باشد در این صورت A را زیرمجموعهٔ B نامیده و می‌نویسند $A\subseteq B$. چنانچه عضوی در A وجود داشته باشد به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A \not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A\subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت :

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,;\,(x\in A \Rightarrow x\in B)$$

$$A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\,;\,(x\in A \wedge x\notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کرده، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آنجا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است بنابراین با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subseteq B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



ویژگی ۱ــ فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند به طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ ثابت کنید $A\subseteq C$.

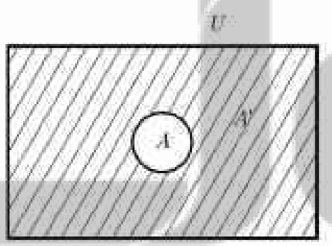
اثبات : برای اثبات $A\subseteq C$، باید ثابت کنیم که : $\forall x\,;\,(x\in A \Rightarrow x\in C)$

برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x\,;\, x\in A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\in B \overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in C$$

در نتیجه داریم :

$$\forall x\,;(x\in A \Rightarrow x\in C) \Rightarrow A\subseteq C$$



ویژگی ۲ــ فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\subseteq B$، ثابت کنید $B'\subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).

قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه A برابر با مجموعهٔ اعضایی از U است که متعلق به مجموعه A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x\in A$ آن‌گاه $x\notin A'$ یا اگر $x\in A'$ آن‌گاه $x\notin A$.

اثبات : برای اینکه ثابت کنیم $B'\subseteq A'$ باید نشان دهیم که : $\forall x\,;\,(x\in B' \Rightarrow x\in A')$ بنابراین داریم :

$$\forall x\,;(x\in B' \Rightarrow x\notin B \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\notin A \Rightarrow x\in A')$$

در نتیجه داریم : $\forall x\,;(x\in B' \Rightarrow x\in A') \Rightarrow B'\subseteq A'$

ویژگی ۳ــ برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید : $\varnothing \subseteq A$.

اثبات : برای اثبات $\varnothing \subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x: (x\in\varnothing \Rightarrow x\in A)$ همواره درست است. چون در این گزاره شرطی ارزش مقدم یعنی $x\in\varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing \subseteq A$.

کار در کلاس

۱ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A \subseteq A\cup B$.

اثبات :

$$\forall x; (x\in A \Rightarrow x\in A \vee x\in B) \Rightarrow x\in A\cup B$$

بنابراین داریم :

$$\forall x; (x\in A \Rightarrow x\in A\cup B) \Rightarrow A\subseteq A\cup B$$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید. اولاً گزاره ی $x\in B$ می تواند درست یا نادرست باشد ولی با توجه به درستی گزاره ی $x\in A$ ترکیب فصلی آنها یعنی $x\in A \vee x\in B$ درست می باشد . ثانیاً در اثبات نشان داده شده که هر عضو درون A عضوی از $A\cup B$ است.
در نتیجه $A\subseteq A\cup B$ خواهد بود.

۲ فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $A\cup C\subseteq B\cup D$.

اثبات : جاهای خالی را پر کنید :

$$\forall x:[x\in(A\cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x\in A \Rightarrow x\in B \quad (A\subseteq B \text{ زیرا}) \\ \vee \qquad\qquad\qquad \vee \\ x\in C \Rightarrow x\in D \quad (C\subseteq D \text{ زیرا}) \end{cases} \Rightarrow x\in B \vee x\in D \Rightarrow x\in B\cup D$$

بنابراین داریم :

$$\forall x; [x\in(A\cup C) \Rightarrow x\in(B\cup D)] \Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$$

۳ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند ثابت کنید اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آن‌گاه $(A\cup B)\subseteq C$.

راهنمایی : از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

$$\left.\begin{matrix} A\subseteq C \\ B\subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\cup B\subseteq C\cup C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$$

دو مجموعه مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد؛ یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت : $A=B \Leftrightarrow [(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$

کار در کلاس

فرض کنید $A=\{1, 2\}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

الف) $\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2-3x+2=0\}$ مساوی A است زیرا: $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1 \vee x=2 \Rightarrow \{1, 2\}$

ب) $\{x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x\leq 2\}$ مساوی A نیست زیرا این مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی از ۱ تا ۲ می باشد و بی شمار عضو دارد .

پ) $\{x\in\mathbb{Q} \mid 2x^2+3x+1=0\}$ مساوی A نیست زیرا: $2x^2+3x+1=0 \Rightarrow x=-1 \vee x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \{-1, -\frac{1}{2}\}$

ت) $\{x\in\mathbb{N} \mid 1\leq x\leq 2\}$ مساوی A است زیرا این مجموعه شامل اعداد طبیعی از ۱ تا ۲ می باشد که خود اعداد ۱و۲ خواهد بود .

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید $A\cap B=B\cap A$. (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

اثبات : برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم :

$$A\cap B\subseteq B\cap A \quad (1) \;;\quad B\cap A\subseteq A\cap B \quad (2)$$

اثبات (۱) :

$$\forall x;\ [x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in B\wedge x\in A \quad (\text{طبق خاصیت جابه‌جایی } \wedge)$$
$$\Rightarrow x\in B\cap A]$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطه (۲) را نشان داد.

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A-B=\varnothing$.

اثبات :

$$A-B=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U\mid x\in B\wedge x\notin B\}=\varnothing \quad (\text{زیرا } A\subseteq B)$$
$$\Rightarrow A-B=\varnothing$$

تمرین

۱ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید :

$C=\{x\mid$ یک لوزی است $x\}$ $\qquad$ $A=\{x\mid$ یک چهارضلعی است $x\}$

$D=\{x\mid$ یک مربع است $x\}$ $\qquad$ $B=\{x\mid$ یک مستطیل است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D\subseteq C$ درست ، زیرا مربع نوع خاصی از لوزی است که زوایای داخلی آن قائمه باشد .

ب) $B\subseteq D$ نادرست ، زیرا نمی توان ادعا کرد تمام مستطیل ها مربعند .

پ) $A\subseteq B$ نادرست ، زیرا نمی توان ادعا کرد که همه ی چهار ضلعی ها مستطیلند . ممکن است ذوزنقه یا ... باشند .

ت) $D\subseteq A$ درست ، زیرا مربعی نوعی چهار ضلعی است .

۲ فرض کنید $A=\{1,2,3,\dots,8,9\}$ و $B=\{2,4,6,8\}$ و $C=\{1,3,5,7,9\}$ و $D=\{3,4,5\}$ و $E=\{3,5\}$.

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، X می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

الف) X و B عضو مشترکی ندارند. $X=C$ یا $X=E$

ب) $X\subseteq A$ ولی $X\not\subseteq C$ $\quad$ $X=A$ یا $X=B$ یا $X=D$

پ) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subseteq B$ $\quad$ $X=D$ یا $X=E$

ت) $X\subseteq C$ ولی $X\not\subseteq A$ $\quad$ چنین مجموعه ای وجود ندارد .

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{\varnothing\}=\varnothing$ نادرست ، زیرا $\{\varnothing\}$ مجموعه ای یک عضوی است ولی $\varnothing$ عضو ندارد .

ب) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$ درست ، زیرا $\varnothing$ زیر مجموعه ی همه ی مجموعه هاست .

پ) $\varnothing\notin\{\varnothing\}$ نادرست ، زیرا $\varnothing$ دقیقاً به عنوان یک عضو درون مجموعه وجود دارد .

ت) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$ درست ، زیرا مجموعه ی $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ دقیقاً به عنوان یک عضو درون مجموعه است .

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$A=\{m\in\mathbb{Z}\mid |m|<2\}=\{-1,0,1\}$

$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^3=x\}=\{-1,0,1\}$

$C=\{y\in\mathbb{Z}\mid y^2\leq 2y\}=\{0,1,2\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^2\leq 1\}=\{-1,0,1\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^3+2m=3m^2\}=\{0,1,2\}$

بنابراین نتیجه می شود که : $A=B=D$ و $C=E$

۵ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\notin C \Rightarrow A=\{۱\}$ و $B=\{\{۱\},۱\}$ و $C=\{\{\{۱\},۱\},۲\}$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C \Rightarrow A=\{۱\}$ و $B=\{\{۱\},۱\}$ و $C=\{\{\{۱\},۱\},\{۱\}\}$

پ) $A\in B$ و $A\subseteq B \Rightarrow A=\{۱\}$ و $B=\{\{۱\},۱\}$

۶ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

گیریم مجموعه ی A دارای n عضو باشد در نتیجه $۲^{n-۲}=۳۸۴-۲^n$ ، بنابراین به حل این معادله می پردازیم :

$$۲^n-۳۸۴=۲^n\times\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^n-۲^n\times\frac{۱}{۴}=۳۸۴\Rightarrow\frac{۳}{۴}۲^n=۳۸۴\xrightarrow[\div ۳]{\times ۴}۲^n=۵۱۲=۲^۹\Rightarrow n=۹\rightarrow$$ مجموعه دارای ۹ عضو است.

۷ اگر $A=\{۲, x+۲y, ۴\}$ و $B=\{۴, ۵, x-y\}$ و $A=B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

$$\begin{cases}x-y=۲\\x+۲y=۵\end{cases}\Rightarrow x=۳, y=۱$$

۸ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم : $A-B\subseteq A$.

$$\forall x:[x\in A-B]\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B\Rightarrow x\in A$$

بنابراین : $A-B\subseteq A$

۹ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه :

الف) $A\cup C\subseteq B\cup C$ اثبات : $\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\C\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$

ب) $A\cap C\subseteq B\cap C$ اثبات :

$$\forall x, x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\xrightarrow{A\subseteq B}x\in B\wedge x\in C\Rightarrow x\in B\cap C$$

بنابراین : $A\cap C\subseteq B\cap C$

۱۰ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه :

الف) $A\cap C\subseteq B\cap D$ اثبات :

$$\forall x, x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B}x\in B\wedge x\in D\Rightarrow x\in B\cap D$$

بنابراین : $A\cap C\subseteq B\cap D$

ب) $A\cap C\subseteq B\cup D$ اثبات :

$$\forall x, x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B}x\in B\wedge x\in D\overset{?}{\Rightarrow}x\in B\vee x\in D$$

$\Rightarrow x\in B\cup D\rightarrow$ بنابراین حکم برقرار است.

? توجه داشته باشید که : اگر $p\wedge q$ درست باشد ، آنگاه p درست و q نیز درست خواهد بود در نتیجه $p\vee q$ درست است . بنابراین از $p\wedge q$ می توان $p\vee q$ را نتیجه گرفت.

۱۱ الف) فرض کنید $A\subseteq\varnothing$ ثابت کنید $A=\varnothing$. ب) فرض کنید $U\subseteq A$ ثابت کنید $A=U$.

اثبات الف) می دانیم تُهی زیر مجموعه ی هر مجموعه است بنابراین : $\varnothing\subseteq A\wedge A\subseteq\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$

اثبات ب) می دانیم هر مجموعه زیر مجموعه ی مرجع است بنابراین : $A\subseteq U\wedge U\subseteq A\Rightarrow A=U$

۱۲ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$ اثبات :

$$\left.\begin{matrix}\forall x, x\in B-A\Rightarrow x\in B\wedge x\notin A\Rightarrow x\in B\rightarrow B-A\subseteq B\\ \forall x, x\in B\xrightarrow{A\cap B=\varnothing}x\in B\wedge x\notin A\Rightarrow x\in B-A\rightarrow B\subseteq B-A\end{matrix}\right\}\Rightarrow B-A=B$$

ب) $A-B=A$ برای اثبات مشابه قسمت الف عمل می کنیم . البته می توان گفت که : این ادعا همان ادعای قسمت الف می باشد و فقط بازی با حروف صورت گرفته است .

۱۳ فرض کنید $X=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای X محسوب می‌شود.

الف) $\{d, g\}$ و $\{b\}$ و $\{a, c, e\}$ افراز نمی باشد زیرا اجتماع آنها مساوی مجموعه ی X نیست .

ب) $\{b, e, f\}$ و $\{c, d\}$ و $\{a, e, g\}$ افراز نمی باشند زیرا دارای عضو مشترک هستند .

پ) $\{d, f\}$ و $\{c\}$ و $\{a, b, e, g\}$ افراز است .

ت) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ افراز نمی باشد زیرا افراز نمی توان متشکل از یک مجموعه باشد .

ث) $\{e\}$ و $\{f, g\}$ و $\{d\}$ و $\{b, c\}$ و $\{a\}$ افراز است .

۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

در این درس می‌خواهیم قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک را بررسی کنیم، شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید یعنی می‌دانیم :

خاصیت جابه‌جایی $\text{I)}\forall\ a,b\in\mathbb{R}\ :\ a+b=b+a$

خاصیت شرکت‌پذیری $\text{II)}\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ :\begin{cases}a+(b+c)=(a+b)+c\\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c\end{cases}$

خاصیت توزیع‌پذیری × نسبت به + $\text{III)}\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ :\ a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست، (با ذکر یک مثال نقض این مطلب را نشان دهید).

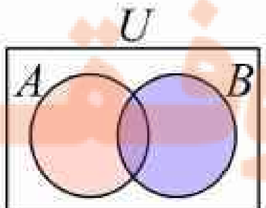
$$\left.\begin{array}{l}۲+(۳\times ۵)=۲+۱۵=۱۷\\ (۲+۳)\times(۲+۵)=۵\times ۷=۳۵\end{array}\right\}\Rightarrow ۲+(۳\times ۵)\neq(۲+۳)\times(۲+۵)$$

در مجموعه‌ها دو عمل $\cup$ و $\cap$ خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب (۷) و (۸) بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

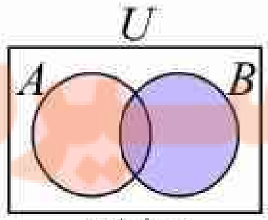
فعالیت

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت ب از دو رنگ استفاده کنید).

الف)

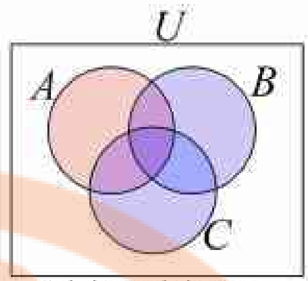


$A\cup B$

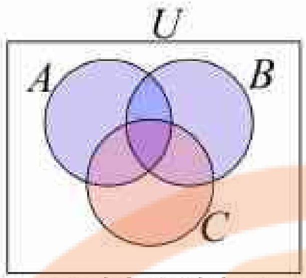


$B\cup A$

ب)

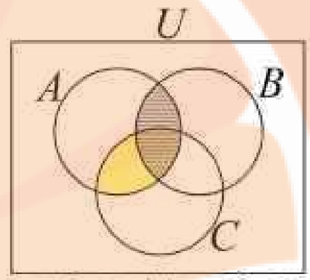


$A\cup(B\cup C)$

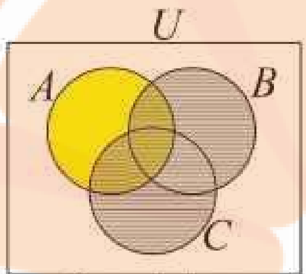


$(A\cup B)\cup C$

پ)

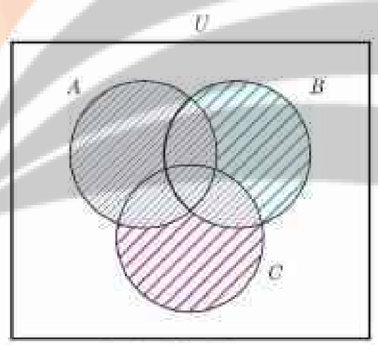


$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

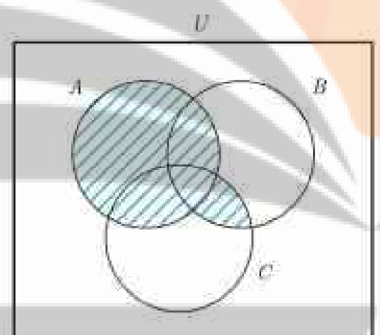


$A\cap(B\cup C)$

ت)



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$



$A\cup(B\cap C)$

۲ با فرض اینکه $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶\}$ در این صورت درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B=\{۳\} \\ B\cap A=\{۳\} \end{array}\right\}\Rightarrow A\cap B=B\cap A$$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap(B\cap C)=\{۱,۲,۳\}\cap\{۵\}=\varnothing \\ (A\cap B)\cap C=\{۳\}\cap\{۱,۲,۵,۶\}=\varnothing \end{array}\right\}\Rightarrow A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap(B\cup C)=\{۱,۲,۳\}\cap\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\{۱,۲,۳\} \\ (A\cap B)\cup(A\cap C)=\{۳\}\cup\{۱,۲\}=\{۱,۲,۳\} \end{array}\right\}\Rightarrow A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

یادآوری : برای اثبات تساوی بین دو مجموعه A و B می‌بایست ثابت کنیم $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$.

کار در کلاس

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص با قوانین را برای $\cup$ و $\cap$ اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید:

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم: $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U \mid x\in B \vee x\in A\}$ جابه‌جایی $\vee$

$=B\cup A$ تعریف اجتماع

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه C ،B ،A از مجموعهٔ مرجع U، داریم:

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C)=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in(B\cup C)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U \mid x\in A \vee (x\in B \vee x\in C)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U \mid (x\in A \vee x\in B)\vee x\in C\}$ شرکت‌پذیری $\vee$

$=\{x\in U \mid x\in(A\cup B)\vee x\in C\}$ تعریف اجتماع

$=(A\cup B)\cup C$ تعریف اجتماع

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه خاصیت توزیع‌پذیری $\cup$ نسبت به $\cap$ را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$

$[x\in A \vee (x\in B\cap C]$ تعریف اجتماع

$[(x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)]$ تعریف اشتراک

$[x\in A \vee x\in B)\wedge(x\in A \vee x\in C)]$ توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$

$[x\in A\cup B \wedge x\in A\cup C]$ تعریف $\cup$

$x\in[(A\cup B)\cap A\cup C]$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A\cup B)\cap\overset{(A\cup C)}{\cancel{(B\cup C)}}\subseteq A\cup(B\cap C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنی فاکتورگیری از $A\cup$ است.)

تذکر: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند:

۱) $A\cup A'=U$ ۲) $A\cap A'=\varnothing$

۳) $A\cup U=U$ ۴) $A\cap U=A$

مثال ۱ : با استفاده از خواص فوق ثابت کنید : (U مجموعهٔ مرجع فرض شده است.)

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A$ ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=C$

پ) $A\cup(B\cup A')=U$ ت) $A-B=A\cap B'$

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)$ جابه‌جایی

$=(A\cup B)\cap(A\cup B')$

$=A\cup(B\cap B')$ فاکتورگیری (عکس خاصیت توزیع‌پذیری)

$=A\cup\varnothing$

$=A$

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=(C\cap A)\cup(C\cap A')$ جابه‌جایی

$=C\cap(A\cup A')=C\cap U=C$ فاکتورگیری

پ) $A\cup(B\cup A')=A\cup(A'\cup B)$ جابه‌جایی

$=(A\cup A')\cup B=U\cup B=U$ شرکت‌پذیری

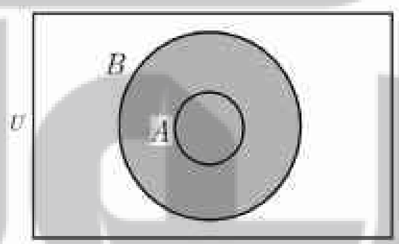
ت) $A-B=\{x\in U|x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B'\}$ تعریف متمم

$=A\cap B'$ تعریف اشتراک

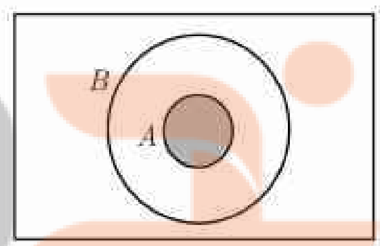
قضیه : برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U داریم :

الف) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$ ب) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$

برهان :قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر $(A\cup B)$ و $(A\cap B)$ را هاشور بزنید.



$(A\cup B)$



$(A\cap B)$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر یک از حالت‌های الف و ب، قضیه‌هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید دو قضیهٔ شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $A\cup B=B$ برای این منظور باید ثابت کنیم $(A\cup B)\subseteq B$ و $B\subseteq(A\cup B)$، رابطهٔ $B\subseteq(A\cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است: بنابراین به اثبات رابطه $(A\cup B)\subseteq B$ می‌پردازیم :

$B\subseteq B$:می‌دانیم

$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq(B\cup B)\Rightarrow(A\cup B)\subseteq B$ (۲)

$A\subseteq B$:طبق فرض

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\bigcup B=B$ اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

(1) و $(2) \Rightarrow (A\bigcup B)=B$

حال فرض کنیم $A\bigcup B=B$، ثابت می کنیم $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq(A\bigcup B)\xrightarrow[\text{فرض}]{A\bigcup B=B} A\subseteq B$

ب) ابتدا فرض کنیم $A\subseteq B$، تساوی $A\bigcap B=A$ را اثبات می کنیم:

(۱) با توجه به تعریف اشتراک داریم: $(A\bigcap B)\subseteq A$

(۲) می‌دانیم: $A\subseteq A$ ، طبق فرض: $A\subseteq B$ $\Rightarrow (A\bigcap A)\subseteq(A\bigcap B)\Rightarrow A\subseteq(A\bigcap B)$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\bigcap B=A$، به‌دست می‌آید.)

(1) و $(2) \Rightarrow (A\bigcap B)=A$

حال فرض می کنیم $A\bigcap B=A$، ثابت می کنیم $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\bigcap B)\subseteq B\xrightarrow[\text{فرض}]{A\bigcap B=A} A\subseteq B$

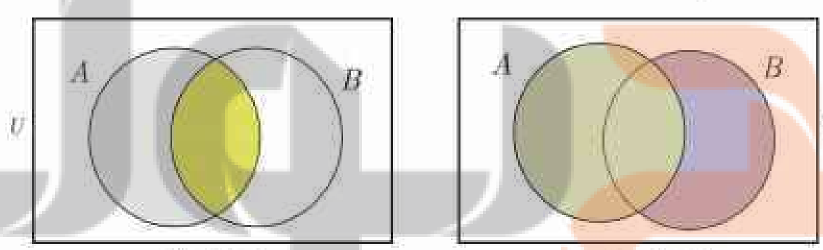
کار در کلاس

(قوانین جذب یا هم‌پوشانی) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند می‌خواهیم تساوی‌های زیر، که به قوانین جذب معروف‌اند را با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

الف) $A\bigcup(A\bigcap B)=A$

ب) $A\bigcap(A\bigcup B)=A$

ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:



$A\bigcup(A\bigcap B)$ $A\bigcap(A\bigcup B)$

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C\subseteq D$ در این صورت $(C\bigcup D)=D$ و $(C\bigcap D)=C$ است.

اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\bigcap B)\subseteq A\xrightarrow{\text{قضیه}} A\bigcup(A\bigcap B)=A$

اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq(A\bigcup B)\xrightarrow{\text{قضیه}} A\bigcap(A\bigcup B)=A$

روش دیگری نیز برای اثبات قوانین جذب وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(U\cup B)$ فاکتورگیری

$=A\cap U=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\varnothing\cap B)$ فاکتورگیری

$=A\cup\varnothing=A$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[\underbrace{(B\cup A)\cap B}_{\text{جذب}}])=(A\cap B)\cup\underbrace{[(B\cup C)\cap B]}_{\text{جذب}}$

$=\underbrace{(A\cap B)\cup B}_{\text{جذب}}=B$

ب) $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$

$(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]=(\underbrace{A\cup B'}_{C})\cap[(\underbrace{B\cap C}_{D})\cup(\underbrace{A\cup B'}_{C})]$ جابه‌جایی

$=(\underbrace{A\cup B'}_{C})$ جذب

مثال : درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-B=B'-A'$

ب) $(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq A')\Rightarrow X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

حل :

الف) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

ب) $\begin{cases}X\subseteq A\\ X\subseteq A'\end{cases}\Rightarrow(X\cap X)\subseteq(A\cap A')\Rightarrow X\subseteq\varnothing$ (۱)

از طرفی می‌دانیم $\varnothing\subseteq X$ و بنابراین $X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')$

$=[(A\cap B')\cap B]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(B'\cap B)]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=(A\cap\varnothing)\cap A'$ تعریف متمم

$=\varnothing\cap A'=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$

$=(A\cap C')\cup(B\cap C')$ توزیع‌پذیری $\cap$ در $\cup$

$=(A-C)\cup(B-C)$ تبدیل اشتراک به تفاضل

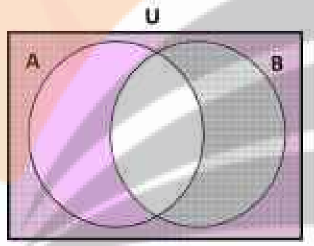
ت) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

$=[(A-B)\cup(A\cap B)]\cup(B-A)$	شرکت‌پذیری اجتماع
$=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(B\cap A')$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$=[A\cap(B'\cup B)]\cup(B\cap A')$	عکس عمل توزیع‌پذیری
$=(A\cap U)\cup(B\cap A')$	تعریف متمم
$=A\cup(B\cap A')$	تعریف مرجع
$=(A\cup B)\cap(A\cup A')$	توزیع‌پذیری
$=(A\cup B)\cap U$	تعریف متمم
$=A\cup B$	تعریف مرجع

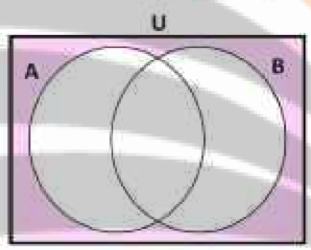
قوانین دمورگان

فعالیت

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، روی شکل سمت چپ، $(A\cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $(A\cup B)'=A'\cap B'$



$A'\cap B'$



$(A\cup B)'$

۲ اگر فرض کنیم $U=\{۱$ و ۲ و ... و $۱۰\}$ و $A=\{۲$و۳و۵و$۸\}$ و $B=\{۲$و۴و۶و$۸\}$ هر یک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\cup B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B=\{۲,۸\}\Rightarrow(A\cap B)'=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۹,۱۰\} \\ A'\cup B'=\{۱,۴,۶,۷,۹,۱۰\}\cup\{۱,۲,۵,۷,۹,۱۰\}=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۹,۱۰\} \end{array}\right\}\Rightarrow(A\cap B)'=A'\cup B'$$

تساوی‌های زیر را که به قوانین دمورگان معروف‌اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند:

$$\begin{cases} \text{الف)}\ (A\cup B)'=(A'\cap B') \\ \text{ب)}\ (A\cap B)'=(A'\cup B') \end{cases}$$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه و تعریف تساوی بین دو مجموعه، تساوی $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ را اثبات کنید. (باید ثابت کنید، $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ و $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$)

$\forall x\in(A\cup B)'\Rightarrow x\notin(A\cup B)\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Rightarrow x\in(A'\cap B')]\Rightarrow(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$

روابط صفحه قبل برگشت‌پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$ که در این صورت تساوی الف اثبات می‌شود.

$x\in A'\cap B'\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\in(A\cup B)'\Rightarrow A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$

کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(A-B)'=(A'\cup B)$ اثبات: $(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$

ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$ اثبات: $(A-B)-C=(A\cap B')\cap C'=(A\cap C')\cap B'=(A-C)-B$

پ) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ اثبات: $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A-B)\cup(A-C)$

مثال : با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

پ) $A-(B-C)=(A-B)-C$

ت) اگر $(A\cup B)=(A\cap B)$ آنگاه $A=B$

حل :

الف) $(A-B)\cap(A-C)$

$=(A\cap B')\cap(A\cap C')$ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(A\cap B')]\cap C'$ جابه‌جایی

$=[(A\cap A)\cap B']\cap C'$ شرکت پذیری

$=(A\cap B')\cap C'$ $A\cap A=A$

$=A\cap(B'\cap C')$ شرکت‌پذیری

$=A-(B'\cap C')'$ تبدیل اشتراک به تفاضل

$=A-(B\cup C)$ قانون دمورگان

ب) $(A\cap B)-(A\cap C)$

$=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$ قانون دمورگان

$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$ توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

$=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]$ قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$=(\varnothing\cap B)\cup[A\cap(B-C)]$ تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم

$=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]$

$=A\cap(B-C)$

پ) با کمی تأمل متوجه می‌شویم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر دچار مشکل شده و این کار انجام نمی‌شود ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم :

$A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{3,4,5\}$ و $C=\{5,6,7\}$ و $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A-(B-C)=\{1,2,3,4,5\}-\{3,4\}=\{1,2,5\}$

$(A-B)-C=\{1,2\}-\{5,6,7\}=\{1,2\}$

ت) وقتی می‌نویسیم $C=D$ یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی تساوی بین مجموعه‌ها به کار می‌بریم می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع و یا اشتراک بگیریم یعنی از اینکه $C=D$ نتیجه می‌شود $A\cup C=A\cup D$ و $A\cap C=A\cap D$

$$A\cup B=A\cap B \Rightarrow A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A=(A\cap B) \xRightarrow{\text{قضیه}} A\subseteq B \qquad (۱)$$

$$(A\cup B)=(A\cap B) \Rightarrow A\cup(A\cup B)= A\cup(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A\cup B)=A \xRightarrow{\text{قضیه}} B\subseteq A \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow A=B$$

روش دوم : دربارهٔ روش زیر که به اختصار نوشته شده است، با هم‌کلاسی خود گفتگو کرده و توضیح دهید :

$$A\subseteq(A\cup B)=(A\cap B)\subseteq B\Rightarrow A\subseteq B$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود $B\subseteq A$ و نتیجه می‌شود $A=B$.

کار در کلاس

۱ اگر $U=\{۱, ۲, ..., ۲۰\}$ و $B=\{۵, ۶, ..., ۱۵\}$ و $A=\{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A=\{۱, ۲, ۳, ..., ۱۰\}$

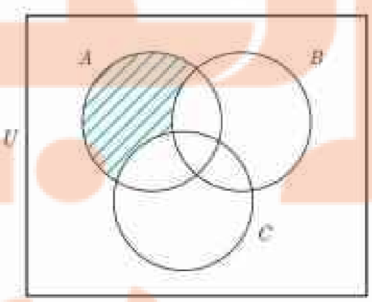
ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])=(A-B)\cup((A-B)\cap[(B-A)\cup A'])$

$$\xrightarrow{\text{قانون جذب}} =A-B=\{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

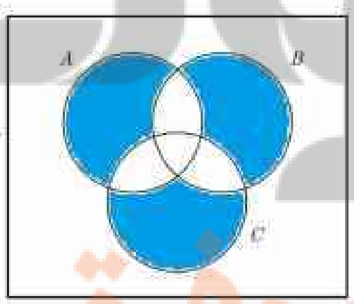
(راهنمایی : ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.

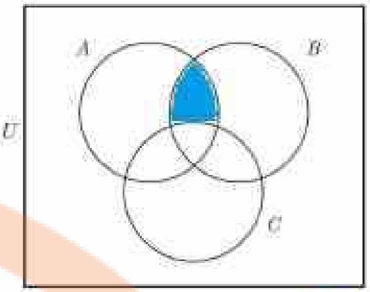
الف) اعضایی که فقط در A باشند.



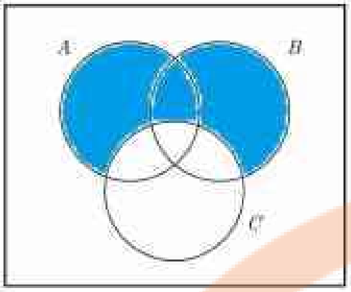
ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه هستند.



پ) اعضایی که در A و B باشند ولی در C نباشند.



ت) اعضایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.



ضرب دکارتی بین دو مجموعه

قبلاً با تعریف زوج مرتب آشنا شده‌اید و می‌دانید که «هر دو شیئی مانند x و y تشکیل یک زوج می‌دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم به آن یک زوج مرتب گفته می‌شود و با نماد (x,y) نشان می‌دهیم» و البته می‌دانیم که $(x,y)=(z,t)$ اگر و تنها اگر $x=z$ و $y=t$.

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعهٔ A و B این امکان را برای ما فراهم می‌سازد تا مجموعهٔ جدیدی بسازیم که اعضای آن هر کدام یک زوج مرتب بوده و هر یک از این زوج‌های مرتب از اعضای A و B ساخته می‌شوند. بنابراین مجموعهٔ حاصل، دارای اعضایی از جنس زوج مرتب بوده و به‌اعضای A یا B شبیه نبوده و فقط اعضای A و B در ساختن آنها نقش دارند.

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه : اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند $A\times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود : $A\times B=\{(x,y)|x\in A \wedge y\in B\}$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x,y) متعلق به $A\times B$ ، همواره مؤلفه یا مختصِ اول یعنی x باید از مجموعهٔ A و متناظراً مؤلفهٔ دوم یعنی y باید از مجموعهٔ B باشد.

مثال : اگر $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۴,۵\}$، در این صورت مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$A\times B=\{(۲,۴),(۲,۵),(۴,۴),(۴,۵),(۶,۴),(۶,۵)\}$

$B\times A=\{(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۵,۲),(۵,۴),(۵,۶)\}$

واضح است که $A\times B\neq B\times A$ (کافی است فقط در یک عضو با هم فرق داشته باشند، مثلاً $(۲,۴)\neq(۴,۲)$ و $(۲,۴)\in A\times B$ و $(۲,۴)\notin B\times A$).

کار در کلاس

در مثال قبل دیدید که در مجموعهٔ $A\times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل ۶ زوج مرتب به‌وجود آمد حال اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید، $n(A\times B)=mk$

برای نوشتن ضرب دکارتی باید به ازای هر عضو A تمام اعضای مجموعه ی B نوشته شوند ، یعنی برای هر عضو A ، K حالت داریم .

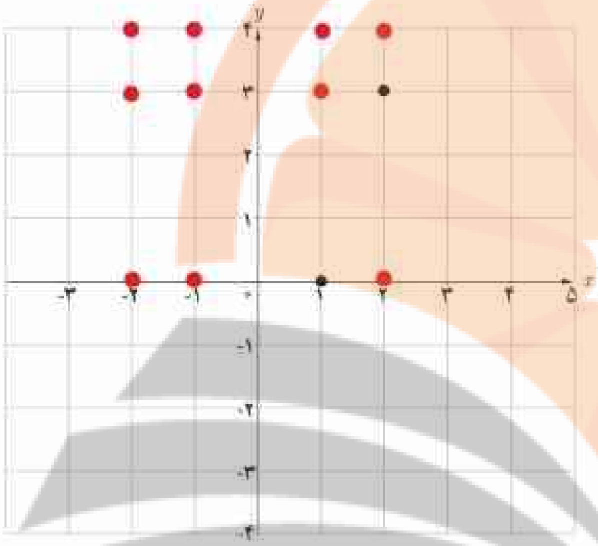
از طرفی A دارای m عضو است ، پس طبق اصل ضرب ، $A\times B$ دارای $m\times k$ عضو است .

فعالیت

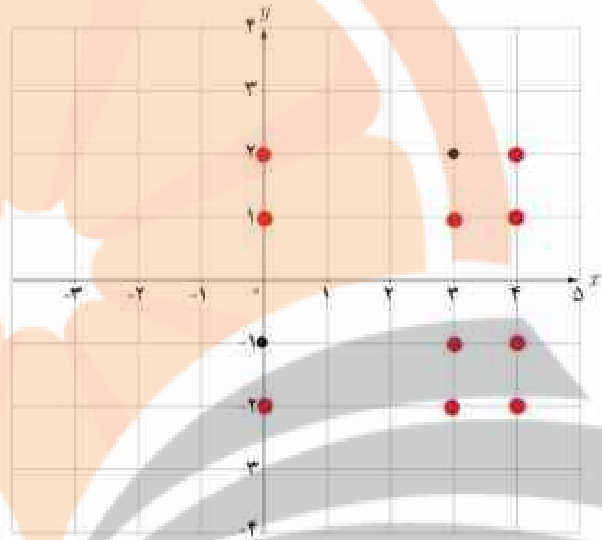
۱ اگر $A=\{-۲,۲,-۱,۱\}$ و $B=\{۰,۳,۴\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل داده و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A\times B=\{(۱,۰),(۱,۳),(۱,۴),(-۱,۰),(-۱,۳),(-۱,۴),(۲,۰),(۲,۳),(۲,۴),(-۲,۰),(-۲,۳),(-۲,۴)\}$

$B\times A=\{(۰,۱),(۰,-۱),(۰,۲),(۰,-۲),(۳,۱),(۳,-۱),(۳,۲),(۳,-۲),(۴,۱),(۴,-۱),(۴,۲),(۴,-۲)\}$



نمودار مختصاتی $A\times B$

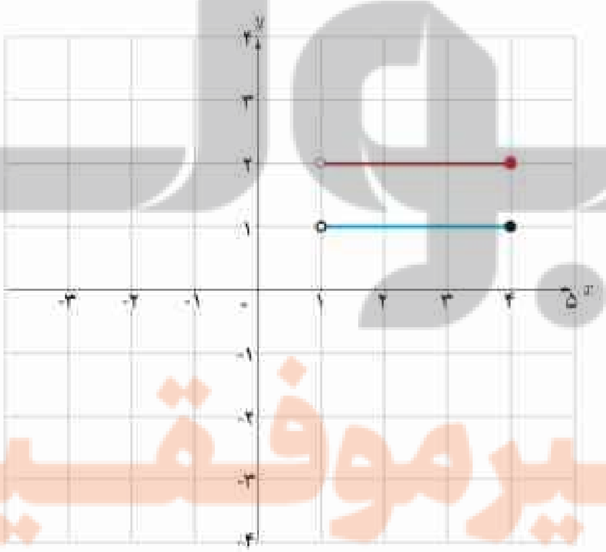


نمودار مختصاتی $B\times A$

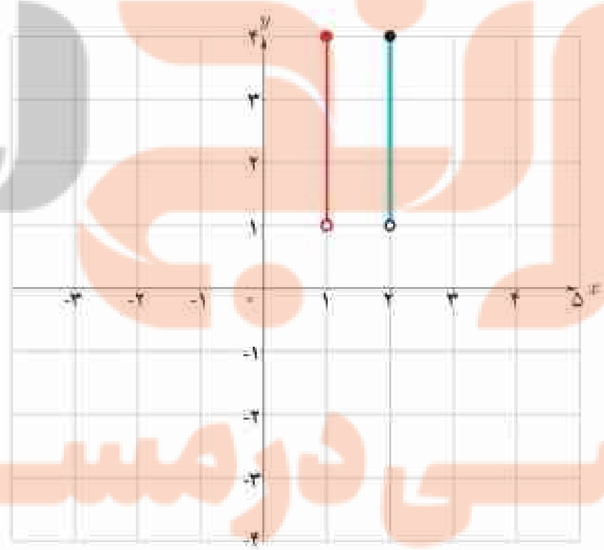
۲ اگر فرض کنیم $A=(۱,۴]$ و $B=\{۱,۲\}$ در این صورت نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$A\times B=\{(x,y)|x\in(۱,۴]\wedge y\in B\}$

$B\times A=\{(x,y)|(x=۱\vee x=۲)\wedge ۱<y\leq۴\}$

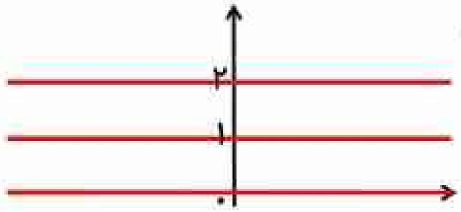


نمودار $A\times B$



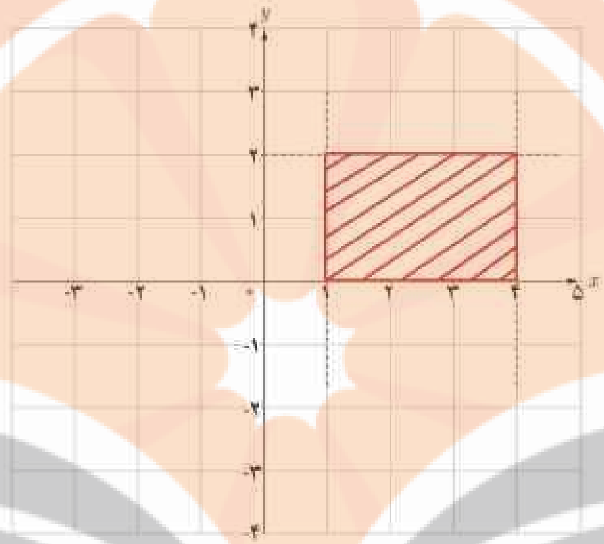
نمودار $B\times A$

۳ اگر فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۰,۱,۲\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.



۴ در صورتی که $A=[۱,۴]$ و $B=[۰,۲]$ در این صورت نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,۱\le x\le ۴ \wedge ۰\le y\le ۲\}$$



۵ در صورتی که فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{R}$ در این صورت حاصل‌ضرب $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^۲$ را چگونه تعبیر می‌کنید؟

این مجموعه شامل تمام نقاط صفحه ی مختصات است .

کار در کلاس

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند در این صورت :

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم :

فرض $A\times\varnothing\neq\varnothing$ کنیم (فرض خلف) در این صورت حداقل یک عضو مانند (x,y) در $A\times\varnothing$ باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in A\times\varnothing \xRightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in A \wedge \underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف باطل شده و حکم برقرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

برهان خلف : فرض می کنیم $\varnothing\times A\neq\varnothing$ در این صورت حداقل یک عضو مانند (x,y) در $\varnothing\times A$ باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in\varnothing\times A\Rightarrow \underbrace{x\in\varnothing}_{\text{تناقض}}\wedge y\in A$$

پس فرض خلف باطل شده و حکم برقرار است .

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرضِ $A\times B=B\times A$، ثابت می‌کنیم $A=B$.

$$A\neq\varnothing, B\neq\varnothing \Rightarrow \exists x; x\in A\wedge \exists y\in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists(x,y);(x,y)\in A\times B$$

$$\xrightarrow{A\times B=B\times A}(x,y)\in B\times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B\wedge y\in A\Rightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A\Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)

تمرین

۱ با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

اثبات: $A\cap B=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B\}=\{x\in U|x\in B\wedge x\in A\}=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

اثبات: $A\cap(B\cap C)=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B\cap C\}$

$=\{x\in U|x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)\}=\{x\in U|(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C\}$

$=\{x\in U|x\in(A\cap B)\wedge x\in C\}=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

اثبات: $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\cup C$

$\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\Rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$

$\Rightarrow x\in A\cap B\wedge x\in A\cap C\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow\boxed{A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

به طور مشابه ثابت می شود $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند.

پاسخ این قسمت در صفحه ی بعد نوشته شده است.

۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A'\cap B)\cup[(B\cap A)-B']\cap(B\cup A)$

ب) $(A\cup B)-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow X=U$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)\Rightarrow B=C$

۵ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ در این صورت با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{۲,۳\}, B=\{۲,۳,۴\}$

ب) $A=\{۳,۴\}, B=(۱,۵]$

پ) $A=[۲,۶], B=[۳,۸]$

ت) $A=\mathbb{N}, B=[۱,۴]$

ث) $A=\mathbb{R}, B=\{۲,۳\}$

۲- الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')=A\cap U=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=(B'\cap A')\cap A=B'\cap(A'\cap A)=B'\cap\varnothing=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap A)\cap(B\cap C)=A\cap[A\cap(B\cap C)]=A\cap[(A\cap B)\cap C]$

$=A\cap[C\cap(A\cap B)]=(A\cap C)\cap(A\cap B)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup A)\cup(B\cup C)=A\cup[A\cup(B\cup C)]=A\cup[(A\cup B)\cup C]$

$=A\cup[C\cup(A\cup B)]=(A\cup C)\cup(A\cup B)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

۳- الف) ابتدا عبارت درون کروشه را ساده می کنیم : $(B\cap A)-B'=(B\cap A)\cap B=B\cap A$

بنابراین : $(A'\cap B)\cup\left(\underbrace{[(B\cap A)-B']}_{B\cap A}\cap(B\cup A)\right)=$

$=(B\cap A')\cup(B\cup A)=(B-A)\cup(B\cup A)\xrightarrow{(B-A)\subseteq(B\cup A)}=B\cup A$

ب) $(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=\underbrace{(A\cap B')}_{A-B}\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}=A-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)=[(A\cup B)\cap A']\cup(A\cap B)=\left[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(B\cap A')\right]\cup(A\cap B)$

$=(B\cap A')\cup(A\cap B)=B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U}=B$

۴- الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow(A\cup A')\subseteq X\Rightarrow U\subseteq X$

از طرفی می دانیم همواره $X\subseteq U$ ، بنابراین $X=U$ است .

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{\varnothing}=A$

پ) $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap(C'\cap C')=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

ت) $(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$

$=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$

$=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup\underbrace{(B\cap A')}_{B-A}]\cup[\underbrace{(A\cap B')}_{A-B}\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]=(B-A)\cup(A-B)=(A-B)\cup(B-A)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=(A\cup B)\cap(A\cup B)'=\varnothing$

ج) $B=B\cap(A\cup B)\xrightarrow{A\cup B=A\cup C}=B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)$

$\xrightarrow{A\cap B=A\cap C}=(A\cap C)\cup(B\cap C)=C\cap(A\cup B)\xrightarrow{A\cup B=A\cup C}=C\cap(A\cup C)=C$

۵- از $A\times B=B\times A$ نتیجه می شود $A=B$ ، بنابراین : $\{x+۱,۴,-۲\}=\{y+۲,۵,z\}$.

واضح است که ۵ فقط می تواند با $x+۱$ برابر باشد لذا $x=۴$ است . اما در موارد دیگر دو حالت داریم :

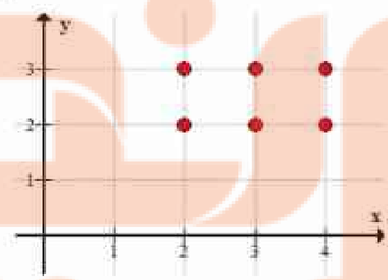
$[(y+۲=۴)\wedge(z=-۲)]\vee[(y+۲=-۲)\wedge(z=۴)]$
$\Rightarrow[(y=۲)\wedge(z=-۲)]\vee[(y=-۴)\wedge(z=۴)]\Rightarrow y+z=۰$

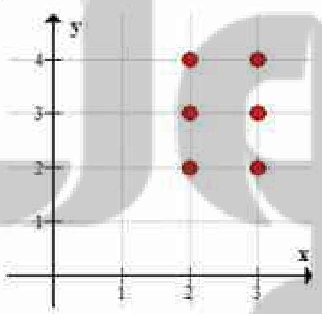
درنتیجه $x+y+z=۴$ خواهد بود .

۶- الف) $A=\{۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$

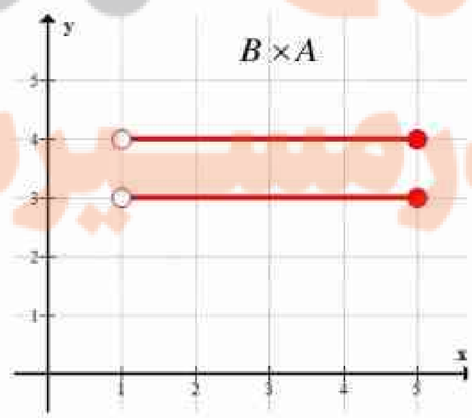
$B\times A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۴,۲),(۴,۳)\}$

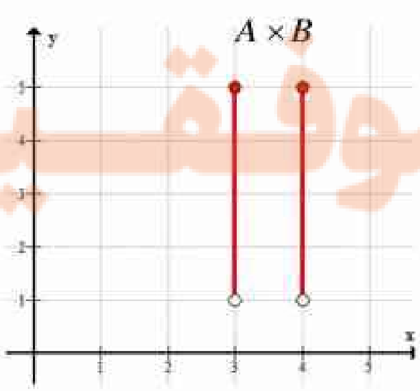
$A\times B=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴)\}$



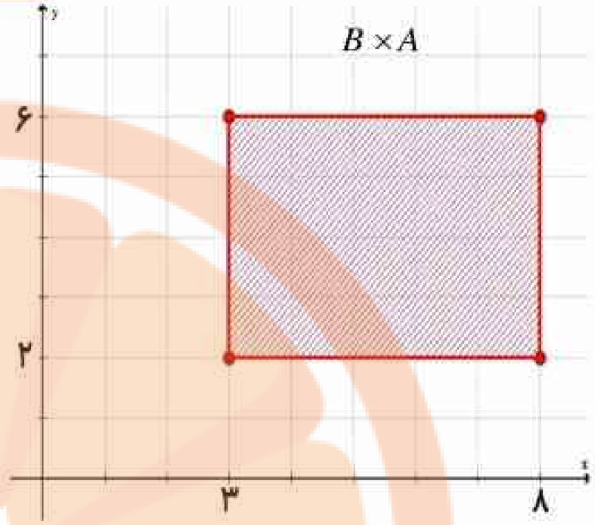


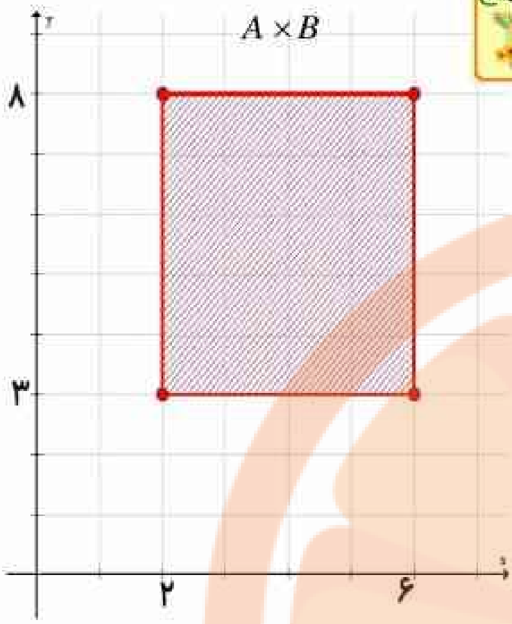
ب) $A=\{۳,۴\}$ و $B=(۱,۵]$



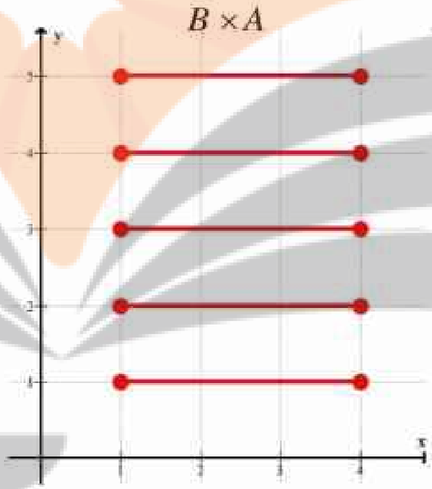


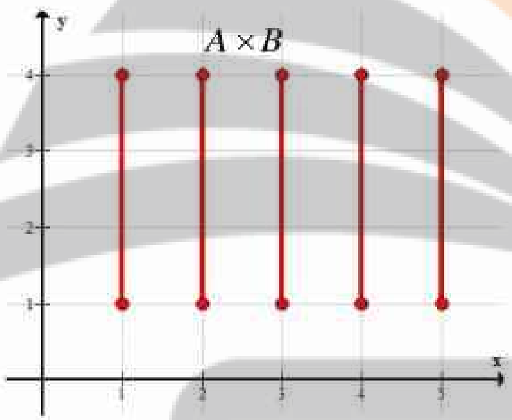
پ) $A=[۲,۶]$ و $B=[۳,۸]$



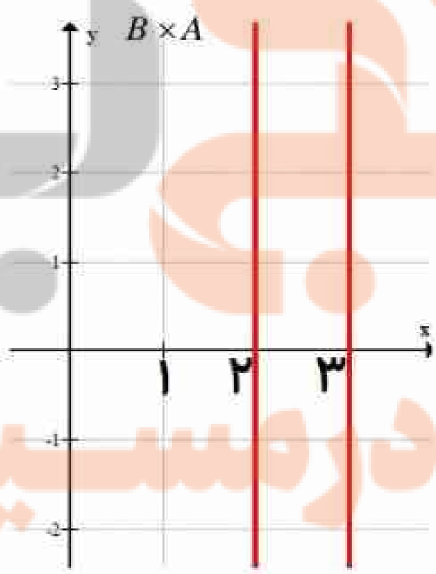


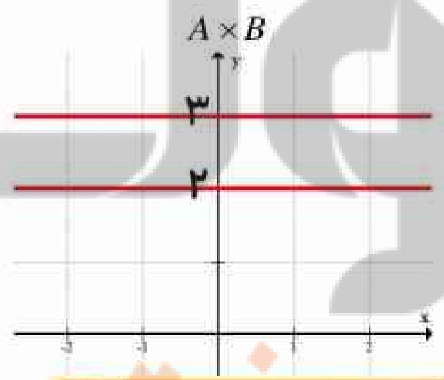
ت) $A=\mathbb{N}$ و $B=[۱,۴]$

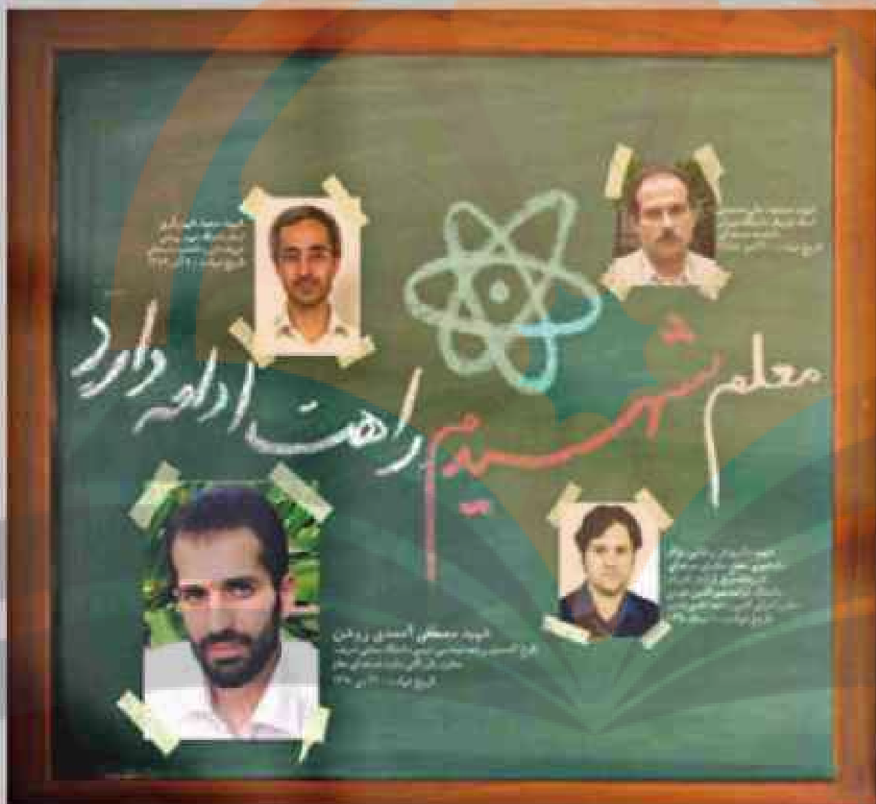




ث) $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۲,۳\}$







امروزه به‌خدمت گرفتن انرژی هسته‌ای بدون آگاهی از علم فیزیک و انجام محاسبات پیچیده با کمک ابررایانه‌ها ممکن نیست. بخشی از این محاسبات به واکنش‌های هسته‌ای مربوط است؛ هنگامی که یک نوترون به سمت جسمی رادیواکتیو شلیک می‌شود، پس از طی مسیری، یا از جسم خارج می‌شود، یا جذب یک اتم می‌شود و یا اتمی را متلاشی می‌کند و در نتیجه چند نوترون و مقداری انرژی به‌وجود می‌آید. نوترون‌های آزادشدهٔ این زنجیره با سرعتی بسیار بالا ادامه می‌دهند. بررسی چنین واکنشی با استفاده از شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای انجام می‌شود و مدل‌های احتمالاتی در آن نقشی بنیادی دارند.

۲ احتمال

بسم الله الرحمن الرحیم

حل کاردرکلاس ها و فعالیت ها به همراه

پاسخ تمرین های فصل دوم کتاب آمار و احتمال

رشته ی ریاضی فیزیک

چاپ تابستان ۱۳۹۶

گروه ریاضی استان خوزستان

تهیه و تنظیم : افشین ملاسعیدی

هزینه ی استفاده، صلواتی جهت سلامتی امام زمان (عج)

مقدمه :

فایلی که در اختیار شما قرار گرفته توسط اینجانب – افشین ملاسعیدی – در مردادماه ۱۳۹۶ نوشته و تنظیم شده است و امیدوارم دارای کمترین خطا بوده و مفید فایده برای شما باشد .

از همکاران ذیل ، اساتید محترم آقایان **عزیز عسکری** ، **احمد عامری** ، **عبدالامیر عباس زاده** ، **جابر عامری** و خانم ها **ژیلا باقری** و **آزاده حاجی هاشمی** که در تهیه ی این مجموعه با من همکاری داشته اند کمال تشکر می نمایم .

از همکاران عزیز تقاضا می کنم در صورت مشاهده ی هر گونه اشتباه اعم از علمی یا تایپی بنده را مطلع ساخته تا در جهت رفع آن اقدام نموده و بتوانم از تجربیات شما استفاده کنم .

جهت ارتباط می توان به یکی از دو روش زیر عمل کرد :

۱- تلگرام : @sinxcosx

۲- همراه : 09168324500

ایرادات و اشکالات تایپی مربوط به فصل دوم

۱- صفحه ی ۴۳ – سطر چهارم ازکار در کلاس : بهتر است نقل قول معلم ، در ادامه ی صحبت شبنم نباشد و آن را در سطر پایین تایپ شود (تصویر زیر)

■ شبنم : بله، من هم موافق هستم.

سؤالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را پرتاب کنیم و عدد ۲ بیاید، آیا پیشامد {۲،۴،۶} رخ داده است؟

۲- صفحه ی ۴۴ – مثال راننده تاکسی : شایسته است تغییر زیر صورت گیرد :

ما مهم باشد، چیست؟

حل : با توجه به اینکه تعداد این دو نوع ~~مسافر~~ مسیر رفت و در برگشت

۳- صفحه ۴۶ – قسمت ۳ کار درکلاس : شایسته است نام شهر یا منطقه ای بیان می شد .

۲ فردا در شهر آبادان

A : خورشید در آسمان دیده شود.

B : باران ببارد. سازگار

۳- صفحه ی ۵۵ سطر ۲۰ ، اشتباه تایپی رُخ داده که بهتر است به شکل زیر تصحیح شود :

$$\cancel{P(B|A)} = \frac{P(A\cap B)}{\cancel{P(A)}} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

$P(A|B)$ $\quad$ $P(B)$

۴- صفحه ی ۵۸ ، سطر داوزدهم ، اشتباه تایپی رُخ داده که به شکل زیر باید اصلاح شود :

دلیل اینکه $P(A)$ برابر $\frac{1}{3}$ است، این است که از سه کارت، یکی دو رو سبز است و $\cancel{P(A|B)} = 1$ جون اگر کارت انتخابی

$P(B|A) = 1$

۵- صفحه ی ۵۹ ، در نمودار درختی دو نماد ضرب ، نوشته شده که بهتر است پاک شوند .

۶- صفحه ی ۶۵ ، تمرین ۳ ، احتمال خواسته شده ابهام دارد . زیرا منظور از "دو روز بعد" مشخص نیست ، آیا "فقط پس فردا" منظور مولف است یا "هم فردا و هم پس فردا" ؟

۷- صفحه ی ۶۶ ، تمرین ۱۲ ، نماد ? اضافی تایپ شده که بهتر است پاک شود .

۸- صفحه ی ۶۶ ، تمرین های ۱۳ و ۱۴ شایسته تر آن بود که ضمن سوال اشاره می شد : "با استفاده از بُرهان خُلف ثابت کنید . . . "

ضمن تشکر از زحماتی که مولفین محترم ، متحمل شده اند ، امیدوارم قبل از چاپ

اولین نسخه ی کتاب ایرادات فوق برطرف گردد .

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

درس ۱ مبانی احتمال

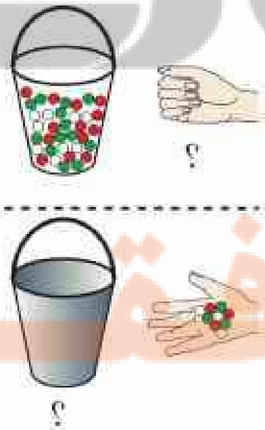
آمار و احتمال به چه کار می‌آیند؟

فرض کنید کارشناسان یک کارخانهٔ تولید لوازم خانگی می‌خواهند برای سال آینده، تغییراتی در میزان تولید کالاهای کارخانه به‌وجود آورند؛ آنها باید مشخص کنند که سرمایهٔ کارخانه به چه نسبت‌هایی صرف تولید یخچال، کولر، اجاق‌گاز و ... شود. با توجه به اینکه آنها در مورد آنچه در آینده رخ خواهد داد، اطمینان ندارند، چگونه می‌توانند در این مورد تصمیمی درست بگیرند؟ چگونه می‌توانند از بین دو پیشنهاد مختلف، یکی را بر دیگری ترجیح دهند؟

ابزارهای حلّ چنین مسائلی، که با ناآگاهی نسبی از شرایط و یا وقایع آینده همراه است، علم آمار و علم احتمال است.

به کمک علم آمار می‌توان اطلاعات سال‌های گذشته کارخانه را به‌درستی جمع‌آوری کرد و از آنها توصیفی مناسب از وضعیت تقاضای کالاهای مختلف به‌دست آورد و سپس به سؤال‌هایی مانند «در سال آینده تقاضای یخچال، کولر، اجاق‌گاز و ... چگونه خواهد بود؟» پرداخت. در قدم بعدی، علم احتمال کمک می‌کند که به بهترین تصمیم ممکن برسیم.

به‌طور خلاصه بخشی از این دو علم به‌نوعی در جهت عکس هم‌اند: آن‌گاه که با جامعه‌ای ناشناخته سر و کار داریم، شناختن جامعه با استفاده از نمونه‌ها و داده‌ها یک کار آماری است، ولی اگر جامعه را با جزئیات مورد نیاز بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه‌هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود، علم احتمال به کمک ما می‌آید. در شکل روبه‌رو، این موضوع نشان داده شده است؛ ظرفی که در آن مهره‌های رنگی وجود دارد، مانند جامعه است و مهره‌هایی که در مشت هستند، مانند نمونه‌اند.



علم احتمال: بررسی یک نمونهٔ نامعلوم از یک جامعهٔ معلوم

علم آمار: شناختن جامعهٔ نامعلوم، با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شدهٔ معلوم

کار در کلاس

کدام‌یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام‌یک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران گفت‌وگو کنید.

صورت مسئله	آمار	احتمال
۱ــ می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟	☐	☑
۲ــ درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟	☑	☐
۳ــ ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟	☐	☑
۴ــ در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟	☐	☑
۵ــ چه تعداد از دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟	☑	☐

ریاضی‌دان‌ها چگونه به علم احتمال می‌پردازند؟

ریاضی‌دانان معمولاً برای حلّ مسائل سخت و پیچیده، ابتدا کار را از طراحی و حلّ مسائلی ساده شروع می‌کنند و سپس قدم به قدم با ساختن بنایی استوار از تعاریف، مفاهیم، قضیه‌ها و... به سراغ مسائلی می‌روند که شاید در نگاه اوّل دست‌نیافتنی به نظر می‌رسیدند. بیایید مانند ریاضی‌دان‌ها مسئلهٔ ساده‌ای را که در آن اطمینان وجود ندارد، بررسی کنیم:

فعالیت

برق‌کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اوّلی و دومی، به‌ترتیب، ۵ و ۲۰ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم‌اند؛ در اوّلی سه لامپ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به‌تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

جواب این سؤال ساده است: در جعبهٔ اوّل ۶۰ درصد و در جعبهٔ دوم ۶۵ درصد لامپ‌ها سالم‌اند، پس بهتر است جعبهٔ دوم را انتخاب کند.

اکنون فرض کنید دو جعبه همان شرایط را دارند، ولی برق‌کار از آن جعبه، دو لامپ، بدون آزمایش، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

در این حالت، تصمیم‌گیری به سادگی حالت اوّل نیست.

کار در کلاس

به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبهٔ اوّل مذکور انتخاب کرد؟

پاسخ : برای انتخاب لامپ اول ۵ حالت و لامپ دوم ۴ حالت ، در نتیجه ۲۰=۴×۵ حالت وجود دارد .

در چند حالت هر دو لامپ معیوب است؟ با وجود دو لامپ معیوب ، برای انتخاب اول ، ۲ حالت و انتخاب دوم ، ۱ حالت در نتیجه ۲=۱×۲ حالت داریم .

مشابه همین سؤال‌ها را در مورد جعبهٔ دوم بررسی کنید. برای انتخاب دو لامپ از بین ۲۰ لامپ ۳۸۰=۱۹×۲۰حالت داریم .

با توجه به اینکه ۷ لامپ معیوب است ، تعداد حالات معیوب بودن دولامپ ۴۲=۶×۷ است.

با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه را برای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

احتمال معیوب بودن در جعبه اول $\frac{۱}{۱۰}=\frac{۲}{۲۰}$ و در جعبه ی دوم $\frac{۴۲}{۳۸۰}$ است ، یعنی احتمال معیوب بودن در جعبه ی دوم بیشتر است .

لذا بهتر است است جعبه ی اول انتخاب شود .

چنین مسائلی هر چند ساختگی‌اند، ولی ماهیت آنها بسیار شبیه همان مسئله‌ای است که کارشناسان کارخانه با آن مواجه بودند : تصمیم‌گیری برای آینده‌ای که در مورد وقایع آن اطمینان نداریم.

خواندنی

از احتمال کیفی تا احتمال کمی

واژهٔ احتمال و مشابه‌های آن مانند شانس، بخت، تصادف در بین مردم عامی هم رایج است : «فردا به احتمال زیاد باران می‌بارد»، «تیم والیبال ایران برای راه‌یابی به المپیک شانس زیادی در آینده دارد» و . . .

مردم گاهی برای توصیف احساس خود در این موارد، از اعداد نیز استفاده می‌کنند، ولی منظور آنها صرفاً بیان یک حسّ کیفی است : «به احتمال ۹۹ درصد هفتهٔ بعد طلا گران می‌شود»، «تیم انتهای جدول یک درصد هم شانس قهرمان شدن ندارد» و . . .

شما نیز چند مثال بزنید که مردم یا رسانه‌ها از عباراتی که معنای احتمال و عدم اطمینان می‌دهند استفاده می‌کنند. آیا شما مثالی در زندگی روزمرهٔ خود سراغ دارید که احتمال را با عدد بیان کنید و منظورتان فراتر از صرفاً بیان یک حس کیفی باشد؟

علم احتمال این عدم اطمینان کیفی را کمّی می‌کند؛ یعنی آن را به عدد تبدیل می‌کند تا در چارچوب علم ریاضی قرار بگیرد و بتوان با کمک محاسبات ریاضی به نتایجی روشن‌تر، دقیق‌تر و قابل اثبات و اتکا رسید.

ترجمهٔ زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

معمولاً وقتی از احتمال رخ دادن رویدادی صحبت می‌کنیم، آن رویداد را به شکل یک گزاره بیان می‌کنیم؛ مثلاً می‌گوییم احتمال اینکه «فردا باران ببارد»، احتمال اینکه «نتیجهٔ مسابقهٔ فوتبال هفتهٔ آینده تساوی شود»، احتمال اینکه «متهم دستگیرشده، مجرم باشد» و . . .

ولی ریاضی‌دانان گاهی به‌شکل دیگری احتمال را به‌کار می‌برند. برای روشن شدن این موضوع، همان مثال قبلی را به یاد بیاورید : فرض کنید برق‌کار جعبهٔ اوّل را انتخاب کرده و می‌خواهد از بین ۵ لامپ یکی را بردارد. لامپ‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم به نحوی شماره‌های ۱ تا ۳ سالم و شماره‌های ۴ و ۵ معیوب باشند.

شمارهٔ لامپی که بیرون کشیده می‌شود برای برق‌کار معلوم نیست، ولی به هر حال یکی از اعضای مجموعهٔ زیر است :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

همان‌طور که می‌دانید در علم احتمال به این مجموعه «فضای نمونه» گفته می‌شود.

به هر عضو فضای نمونه یک «برآمد» می‌گویند.

برق‌کار در صورتی راضی می‌شود که لامپ انتخابی سالم باشد و این یعنی اینکه شمارهٔ لامپ ۱، ۲ یا ۳ باشد. در این صورت، این اتفاق را هم می‌توان با یک زیرمجموعهٔ فضای نمونه مشخص کرد:

$A=\{۱,۲,۳\}$

همان‌طور که در سال‌های گذشته خوانده‌اید در علم احتمال به این زیرمجموعه‌ها «پیشامد» گفته می‌شود.

در زبان علم احتمال به جای اینکه بگوییم «لامپ انتخاب شده سالم باشد»، می‌توانیم بگوییم «پیشامد A رخ دهد» و به جای اینکه بگوییم «احتمال سالم بودن لامپ انتخابی»، می‌توانیم بگوییم «احتمال رخ دادن A». عبارت اخیر خلاصه‌شدهٔ این عبارت است «احتمال اینکه شمارهٔ لامپ انتخابی عضو A باشد».

کار در کلاس

زهرا و شبنم در مورد سؤالی که دربارهٔ پرتاب یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می‌کنند. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟

- زهرا: فضای نمونه در این مسئله مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}$ است. درست
- شبنم: بله، من هم موافق هستم. درست

سؤالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را پرتاب کنیم و عدد ۲ بیاید، آیا پیشامد $\{۲,۴,۶\}$ رخ داده است؟

- زهرا: به نظرم نه، چون ۴ و ۶ هم علاوه بر ۲ عضو این پیشامدند. نادرست
- شبنم: ولی من فکر می‌کنم این پیشامد رخ داده است، چون این پیشامد، شامل عدد ۲ است. درست
- زهرا: پس ۴ و ۶ که نیامدند چه؟
- شبنم: یعنی باید آنها هم در پرتاب تاس آمده باشند تا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً این‌طور که شما فکر می‌کنید، چگونه ممکن است پیشامد $\{۲,۴,۶\}$ رخ دهد؟ مگر می‌شود تاسی را پرتاب کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟! درست

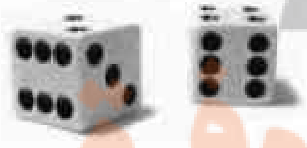
با توجه به مفهوم «رخ دادن یک پیشامد» می‌فهمیم که اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد باشند، آن‌گاه:

الف) اگر $A_۱$ زیرمجموعهٔ $A_۲$ باشد، رخ دادن $A_۱$ رخ دادن $A_۲$ را نتیجه می‌دهد.

ب) رخ دادن پیشامد $A_۱ \cap A_۲$، یعنی هر دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ دهد.

پ) رخ دادن پیشامد $A_۱ \cup A_۲$، یعنی دست‌کم یکی از دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ دهد.

تشخیص فضای نمونه



هرگاه بخواهیم مسئله‌ای را با کمک علم احتمال بررسی کنیم قدم اوّل شناختن فضای نمونه است. همان‌طور که گفته شد فضای نمونه مجموعه‌ای است که اعضای آن، که به آنها برآمد می‌گوییم، مشخص می‌کنند که نتیجهٔ آزمایش یا مشاهده‌ای که در حال بررسی آن هستیم چه حالت‌هایی دارد؛ مثلاً در پرتاب یک تاس، مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}$ فضای نمونه است.

اگر بخواهیم نتایج حاصل از پرتاب دو تاس را بررسی کنیم از عمل ضرب دکارتی مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم؛ مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\} \times \{۱,۲,...,۶\}$ که ۳۶ عضو دارد فضای نمونه است. البته لازم است که یکی از تاس‌ها را تاس اوّل و دیگری

را تاس دوم بنامیم تا مشخص شود که معنای برآمد (۱,۲) چیست. توجه داشته باشید که این برآمد غیر از برآمد (۲,۱) است.

در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونهٔ S_1 و S_2 باشد فضای نمونهٔ آن $S_1\times S_2$ است. مشابه این موضوع برای هر تعداد آزمایش هم‌زمان نیز درست است.

مثال : یک رانندهٔ تاکسی خطی، در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده‌ای، اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما مهم باشد، چیست؟

حل : با توجه به اینکه تعداد این دو نوع مسافر ~~در~~ مسیر رفت و در برگشت عددی بین صفر و چهار است، می‌توان مجموعهٔ زیر را فضای نمونه گرفت :

$S=\{۰,۱,۲,۳,۴\}\times\{۰,۱,۲,۳,۴\}$

در این فضای نمونه، منظور از برآمد (۱,۲) این است که تاکسی با ۱ مسافر حرکت کرده و در برگشت ۲ مسافر سوار کرده است.

اصول احتمال

در حالت کلی شناختن فضای نمونه برای توصیف یک رویداد تصادفی کافی نیست. علاوه بر آن لازم است که بدانیم احتمال رخ دادن پیشامدهای مختلف که زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌اند، چقدر است. این موضوع را در درس بعد که در مورد احتمال غیرهم‌شانس است بهتر متوجه خواهید شد. به‌عنوان مثال، به وضعیت آب و هوای قلهٔ دماوند در صبح نوروز سال آینده فکر کنید؛ می‌توان فضای نمونه را این‌چنین در نظر گرفت :

{ آفتابی، ابری }

آیا چون فضای نمونه دو عضوی است باید احتمال هر کدام ۵۰ درصد باشد؟
ممکن است کسی فضای نمونه را به شکل زیر انتخاب کند :

{ آفتابی، ابری بدون بارندگی، بارش باران، بارش برف، بارش تگرگ }

در این صورت آیا چون فضای نمونه پنج عضو دارد، باید احتمال هر کدام ۲۰ درصد باشد؟
اگر کسی به هر دو سؤال بالا جواب مثبت دهد، پس احتمال آفتابی بودن را یک بار ۵۰ درصد و یک بار ۲۰ درصد دانسته است!

خواندنی

یک اشتباه تاریخی

مشهور است که دالامبر[1]، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، فیلسوف و دائرةالمعارف‌نویس فرانسوی قرن هجدهم، تصور می‌کرد که اگر یک سکه را دو بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه دقیقاً یک بار رو بیاید، برابر یک سوم است. او این‌گونه استدلال می‌کرد :

در چنین آزمایشی سه حالت وجود دارد : «هر دو رو»، «هر دو پشت» و «یک بار رو و یک بار پشت». در نتیجه احتمال وقوع هر یک از این حالات یک سوم است!

همان‌طور که گفته شد نکته این است در یک فضای نمونه برآمدهای مختلف ممکن است احتمال برابر نداشته باشند. در این حالت، محاسبهٔ احتمال برآمدها و پیشامدها ممکن است ساده نباشد، ولی احتمال پیشامدهای مختلف حتماً باید ویژگی‌هایی داشته باشد که به آنها اصول احتمال می‌گویند :

برای هر پیشامد مثل A، احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده می‌شود که عددی حقیقی در بازهٔ $[۰,۱]$ است.
اصول احتمال عبارت‌اند از :

۱ $P(S)=۱$

۲ برای هر دو پیشامد A و B که $A\cap B=\varnothing$ ، داریم $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

به خاصیتی که در بند ۲ برای دو پیشامد A و B فرض شده است، یعنی $A\cap B=\varnothing$، ناسازگاری این دو پیشامد گفته می‌شود و به این معناست که رخ دادن هر دوی آنها هم‌زمان محال است. در غیر این صورت، می‌گوییم A و B سازگارند.

قضیه

در مورد هر فضای نمونه، گزاره‌های زیر درست است :

۱ $P(A')=۱-P(A)$

۲ $P(\varnothing)=۰$

۳ اگر A، B و C پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آن‌گاه

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

(این قسمت را می‌توان برای هر تعداد پیشامد نیز تعمیم داد).

۴ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

۱ـ Jean Baptiste le Rond d'Alembert (۱۷۱۷ـ۱۷۸۳)

۵ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

اثبات.

۱ به این موضوع توجه کنید که A و A' دو پیشامد ناسازگارند و اجتماع آنها برابر S می‌شود، داریم :

$$۱=P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

در نتیجه $P(A')=۱-P(A)$.

۲ با توجه به اینکه $\varnothing$ متمم S است داریم :

$$P(\varnothing)=۱-P(S)=۱-۱=۰$$

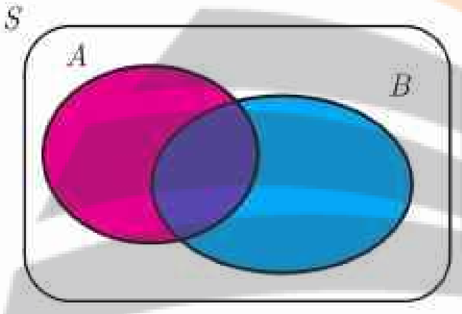
۳ توجه کنید که A و $B\cup C$ نیز دو پیشامد ناسازگارند و لذا

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

۴ واضح است که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ و پیشامدهای $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند، پس

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$$

و این نتیجه می‌دهد که $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.



۵ توجه کنید که $A\cup B=B\cup(A-B)$ و به‌علاوه دو پیشامد B و $A-B$ ناسازگارند. در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A-B)$$

با استفاده از شمارهٔ ۴ حکم نتیجه می‌شود. (چرا؟)

زیرا $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

کار در کلاس

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱ دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کنید،

A : متولد ماه مهر باشد.

B : متولد فصل تابستان باشد.

ناسازگار

۲ سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید،

A : هر سه بار مشابه بیاید،

B : زوج بار رو بیاید.

سازگار

۳ فردا در شهر آبادان

A : خورشید در آسمان دیده شود،

B : باران ببارد.

سازگار

۴ تاسی را پی در پی پرتاب می‌کنید،

A : برای اولین بار در مرتبهٔ سوم ۶ بیاید،

B : تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

ناسازگار

تمرین

۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برندهٔ بازی است؟

پاسخ : در نوشتن فضای نمونه نفر اول را احمد و نفر دوم را عباس در نظر می گیریم ، بنابراین :

S= { (ق و ق) و (ک و ق) و(س و ق) و (ق و ک) و (ک و ک) و (س و ک) و (ق و س) و (ک و س) و (س و س) }

فضای نمونه ای دارای ۹ عضو است .

احمد درحالات(ک و ق) و(س و ک) و (ق و س) برنده می شود ، یعنی در ۳ حالت برنده است .

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قدّ آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اوّلین کسی که وارد می‌شود، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

پاسخ : برای اولین فردی که وارد می شود ، ۱۴ حالت داریم و برای دومین فرد ، ۱۳ حالت و . . . و برای آخرین فرد فقط ۱ حالت وجود دارد ، بنابراین فضای نمونه دارای !۱۴ عضو است . احتمال این که اولین فرد وارد شونده ، بلند قدترین باشد $\frac{13!}{14!}=\frac{1}{14}$ است .

۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود : دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم : آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه‌ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل‌ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

$S=$ {سرد و گرم} × {خشک و مرطوب} × {باد می وزد و باد نمی وزد} × {صاف و نیمه ابری و ابری} × {بارش باران و عدم بارش باران}

تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با : $2\times2\times2\times3\times2=48$

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات‌شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید :

الف) اگر $B\subseteq A$ داریم : $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} B\subseteq A \Rightarrow P(A\cap B)=P(B) \\ P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$$

ب) اگر $B\subseteq A$، آن‌گاه $P(B)\leq P(A)$.

$$P(A-B)\geq 0 \xrightarrow{\text{طبق الف}} P(A)-P(B)\geq 0 \Rightarrow P(A)\geq P(B)$$

۵ عددی به‌تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید : الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد. ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، ولی به ۳ بخش‌پذیر نباشد. پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.

پاسخ :تعریف می کنیم : $A=$ { اعداد بخش پذیر بر ۲ } و $B=$ { اعداد بخش پذیر بر ۳ } بنابراین :

$A\cap B=$ { اعداد بخش پذیر بر ۲ و۳ یعنی بر ۶ } و در نتیجه :

$$n(A)=50 \text{ و } n(B)=33 \text{ و } n(A\cap B)=16 \xrightarrow{n(S)=100} P(A)=0/50 \text{ و } P(B)=0/33 \text{ و } P(A\cap B)=0/16$$

الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/50+0/33-0/16=0/67$

ب) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0/50-0/16=0/34$

پ) $P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-0/67=0/33$

درس ۲ احتمال غیر هم‌شانس

نتایج بسیاری از آزمایش‌ها و اتفاق‌هایی که در آینده رخ می‌دهند، از قبل مشخص نیست، ولی می‌توان شانس یا احتمال وقوع آنها را از قبل تعیین کرد؛ مثلاً در پرتاب یک تاس سالم، شانس مشاهدهٔ هرکدام از اعداد با یکدیگر برابر است، ولی در مسابقه‌های گروهی، شانس قهرمانی تیم‌ها، لزوماً با یکدیگر برابر نیست. قبل از برگزاری جام‌جهانی ۲۰۱۴ فوتبال، شانس قهرمانی تیم‌ها به‌صورت زیر مشخص شده بود :

تیم	برزیل	آرژانتین	آلمان	اسپانیا	بلژیک	فرانسه	کلمبیا	هلند	بقیه تیم‌ها
احتمال قهرمانی	۰/۲۵	۰/۱۸۱	۰/۱۶۶	۰/۱۲۵	۰/۰۶۶	۰/۰۴۷	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۷۹

و جالب این است که چهار تیم راه یافته به مرحلهٔ نیمه نهایی، از هشت تیم نخست جدول فوق بودند. دنیای پیرامون ما سرشار از پیشامدهای غیرهم‌شانس است. به‌نظر شما احتمال بارش باران و آفتابی بودن هوا در تمام روزهای سال با یکدیگر برابر است؟

خیر به طور مثال ، در مرداد ماه احتمال بارش باران بسیار کمتر از احتمال آفتابی بودن هوا است .

فعالیت

یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی‌مانده عدد ۳ مشاهده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم،

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

S = { ۱ , ۲ , ۳ }

۲ با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این تاس قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به‌دست آورید.

$A=\{۱\} \Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۲}$

آیا می‌توانید از رابطهٔ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبهٔ احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟ چرا؟ خیر زیرا اعضای آن هم شانس نیستند.

هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم. در پیشامدهای ساده، معمولاً به‌جای، $P(\{a\})$ می‌نویسیم $P(a)$.

۳ مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجوهی از تاس که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده است، احتمال وقوع پیشامدهای ساده $B=\{۲\}$ و $C=\{۳\}$ را به‌دست آورید.

$P(۲)=\frac{۱}{۳}$, $P(۳)=\frac{۱}{۶}$

۴ آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید خیر زیرا پیشامد ها غیر هم شانس هستند.

۵ به کمک نتایج قسمت‌های قبل، مجموع تمام پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

$P(۱)+P(۲)+P(۳)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=۱$

۶ اگر $D=\{۱,۲\}$ پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در پرتاب تاس باشد، $P(D)$ را به‌دست آورید. این مقدار را با $P(۱)+P(۲)$ مقایسه کنید. $P(D)=\frac{۵}{۶}$ و $P(۱)+P(۲)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}$ در نتیجه: $P(۱)+P(۲)=P(D)$

همان‌طور که در فعالیت بالا مشاهده می‌کنید، در فضای نمونه‌ای S، احتمال وقوع پیشامدهای ساده با یکدیگر برابر نیستند.

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{s_۱, s_۲, \ldots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

در احتمال غیرهم‌شانس نیز مانند احتمال هم‌شانس که در سال‌های گذشته خوانده‌ایم، خواص زیر برقرارند:

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S=\{s_۱, s_۲, \ldots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_۱, a_۲, \ldots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشند، همواره داریم:

۱ $۰ \le P(A) \le ۱$

۲ $P(S)=۱$

۳ $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+\cdots+P(a_k)$

با استفاده از خاصیت (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجهٔ زیر را بگیریم:

$P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+\cdots+P(s_n)=۱$

مثال: در یک مسابقهٔ چهارجانبه فوتبال، تیم‌های a، b، c و d حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم‌های a، b و c با

یکدیگر برابر باشند، ولی احتمال قهرمانی تیم d، دو برابر هر یک از تیم‌های دیگر باشد، احتمال قهرمانی هریک از تیم‌ها را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید احتمال قهرمانی تیم a، x باشد، یعنی $P(a)=x$. از آنجایی که شانس قهرمانی تیم‌های a، b و c برابرند، پس $P(b)=P(c)=x$ از سوی دیگر احتمال قهرمانی تیم d، دو برابر تیم‌های دیگر است، پس $P(d)=۲P(a)=۲x$. با توجه به اینکه فضای نمونه‌ای در این مسئله $S=\{a, b, c, d\}$ است. بنابراین

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱$$

با جای‌گذاری احتمال‌های بالا برحسب x، به تساوی $x+x+x+۲x=۱$ می‌رسیم. پس $۵x=۱$ و در نتیجه $x=\frac{۱}{۵}$. بنابراین، احتمال قهرمانی هر یک از تیم‌ها عبارت است از: $P(a)=P(b)=P(c)=\frac{۱}{۵}$ و $P(d)=\frac{۲}{۵}$.

کار در کلاس

۱ در یک آزمایش تصادفی، $S=\{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x, y\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{x, z\})=\frac{۱}{۲}$، احتمال وقوع هریک از پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

حل:

با توجه به اینکه x، y و z همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند. بنابراین $P(x)+P(y)+P(z)=۱$. همچنین با توجه به فرض $P(\{x, y\})=\frac{۲}{۳}$، پس $P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳}$. بنابراین با توجه به تساوی بالا، $P(z)=\frac{۱}{۳}$.

از سوی دیگر، $P(\{x, z\})=\frac{۱}{۲}$، پس $P(x)+P(z)=\frac{۱}{۲}$. از قراردادن $P(z)$ در این تساوی $P(x)=\frac{۱}{۶}$ به‌دست می‌آید. اکنون این مقدار را در تساوی $P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳}$ قرار دهید و مقدار $P(y)$ را به‌دست آورید: $P(y)=\frac{۱}{۲}$.

۲ یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهدهٔ اعداد ۲ یا ۳ را به‌دست آورید.

در این سؤال، $P(a)=۳P(b)$ که در آن a یک عدد زوج و b یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. بنابراین $P(۱)=P(۳)=P(۵)$ و همچنین $P(۲)=P(۴)=P(۶)$. (چرا؟) طبق فرض احتمال وقوع هر عدد زوج ، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است ، لذا زوج ها احتمال یکسان و فرد ها نیز احتمال برابر دارند .

حال اگر $P(۱)=x$، سپس $P(۲)=۳x$. از رابطهٔ زیر استفاده کرده و با جای‌گذاری احتمال پیشامدهای ساده برحسب x، مقدار x را به‌دست آورید.

$$P(S)=۱ \Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$
$$\Rightarrow x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱$$
$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$$

اکنون با محاسبه $P(۲)$ و $P(۳)$ می‌توانید $P(\{۲,۳\})$ را تعیین کنید.

$P(۲)=۳x=\frac{۳}{۱۲}$ و $P(۳)=x=\frac{۱}{۱۲}$ درنتیجه: $P(\{۲,۳\})=\frac{۳}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$

تمرین

۱ در پرتاب یک سکهٔ ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

$P(\text{رو}) = x \Rightarrow P(\text{پشت}) = 2x$

$P(\text{رو})+P(\text{پشت})=1 \Rightarrow x+2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow P(\text{رو})=\frac{1}{3}$ و $P(\text{پشت})=\frac{2}{3}$

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهدهٔ هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

$P(1)=x$, $P(2)=2x$, $P(3)=3x$, $P(4)=4x$, $P(5)=5x$, $P(6)=6x$

$\Rightarrow x+2x+3x+4x+5x+6x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{21}$

$\Rightarrow P(\{1,2,3\})=P(1)+P(2)+P(3)=x+2x+3x=6x=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

۳ اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a,b\}$ ، $B=\{a,b,c,d\}$ و $C=\{a,b,e\}$ سه پیشامد باشند به‌طوری که $P(A)=\frac{2}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C')$ را به‌دست آورید.

$P(B-A)=P(B)-P(A) \Rightarrow P(\{c,d\})=\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{11}{35}$

$P(C')=P(\{c,d\})=\frac{11}{35}$

۴ در یک تجربهٔ تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از این پیشامدها را به‌دست آورید.

پاسخ : دنباله ی حسابی را به صورت رو به رو در نظر می گیریم : $P(x)$, $P(y)$, $P(z)$

$\Rightarrow P(y)=P(x)+\frac{1}{4}$, $P(z)=P(y)+\frac{1}{4}=P(x)+\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{P(x)+P(y)+P(z)=1} P(x)+P(x)+\frac{1}{4}+P(x)+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow P(x)=\frac{1}{12}$

$\Rightarrow P(y)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ و $P(z)=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$

۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است[1]، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ اول، x باشد.

اگر احتمال اصابت به ناحیهٔ k ام، $(2k-1)x$ باشد : الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به‌دست آورید.

پاسخ : نواحی اول تا پنجم را با n_1 و n_2 و ... و n_5 نمایش می دهیم .

$$\left.\begin{array}{l} P(n_1)=x,\ P(n_2)=3x,\ P(n_3)=5x \\ P(n_4)=7x,\ P(n_5)=9x \end{array}\right\} \xrightarrow{+} x+3x+5x+7x+9x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{25}$$

$\Rightarrow P(n_1)=\frac{1}{25}$, $P(n_2)=\frac{3}{25}$, $P(n_3)=\frac{5}{25}$, $P(n_4)=\frac{7}{25}$, $P(n_5)=\frac{9}{25}$

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیهٔ دوم یا پنجم؟

$$\left.\begin{array}{l} P(\{n_1,n_3,n_4\})=\frac{1}{25}+\frac{5}{25}+\frac{7}{25}=\frac{13}{25} \\ P(\{n_2,n_5\})=\frac{3}{25}+\frac{9}{25}=\frac{12}{25} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ **احتمال اصابت به یکی از نواحی اول ، سوم و چهارم بیشتر است .**

[1] ــ مرز مشترک بین دو ناحیه را جزء ناحیهٔ کوچک‌تر محسوب کنید.

درس ۳ احتمال شرطی

در مسائلی که در آنها با عدم قطعیت و احتمال سر و کار داریم، گاهی با سؤال‌هایی شرطی مواجه هستیم : «اگر فردا برف ببارد، چقدر احتمال دارد راه برخی روستاهای دهستان‌های شهرستان کنگاور مسدود شود؟»، «اگر راننده‌ای از کمربند ایمنی استفاده نکند، چقدر احتمال دارد پس از تصادف، دچار نقص عضو شود؟»، «اگر دانش‌آموزی در سال یازدهم موفق به کسب معدل بالای ۱۸ شود، چقدر احتمال دارد که در سال گذشته معدلش زیر ۱۵ بوده باشد؟» و . . .

در همهٔ این موارد با دو پیشامد مختلف سر و کار داریم و فرض می‌کنیم یکی از آنها رخ داده است و می‌خواهیم بدانیم احتمال رخ دادن دومی چه تغییری کرده است.

فعالیت

۱ در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰، یکی را به تصادف انتخاب کنند. شمارهٔ کارت اکبر ۱۵ و شمارهٔ کارت بهرام ۷ است.

الف) احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟ $\frac{1}{20}$ احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟ $\frac{1}{20}$

ب) وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می‌گوید : «عدد برنده، دو رقمی است!» اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟

احتمال برنده شدن اکبر $\frac{1}{11}$ و احتمال برنده شدن بهرام صفر است .

۲ در مدرسه‌ای سه کلاس یازدهم، با نام‌های ۱ــ۱۱، ۲ــ۱۱ و ۳ــ۱۱ وجود دارد که به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به‌ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. یکی از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه که شامل همهٔ دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم است، چند عضوی است؟ $32+33+35=100$

ب) احتمال اینکه دانش‌آموز انتخاب شده نمرهٔ کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است؟ $\frac{23}{100}$

پ) احتمال اینکه او، دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ باشد (پیشامد B) چقدر است؟ $\frac{32}{100}$

ت) فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ است. در این صورت، چقدر احتمال می‌دهید که او موفق به کسب نمرهٔ کامل شده باشد؟ $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

در حلّ قسمت (ت) می‌توان این‌طور فکر کرد که فضای نمونه، که متشکل از ۱۰۰ دانش‌آموز

پایهٔ یازدهم است، بعد از اطلاع از اینکه او دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ است، به فضای نمونهٔ دیگری، که متشکل از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ است، کاهش یافته است. سپس باید بررسی کنیم که چند نفر از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. این یعنی تعداد اعضای پیشامد $A \cap B$ را بشماریم. نتیجه را باید به تعداد اعضای مجموعهٔ B تقسیم کنیم.

در علم احتمال برای آنچه در قسمت (ب) فعالیت ۱ و قسمت (ت) فعالیت ۲ پرسیده شد، از اصطلاح «احتمال شرطی» استفاده می‌کنند. مثلاً در فعالیت ۲ که پیشامد A «کسب نمرهٔ کامل» و B «دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ بودن» است آنچه خواسته شد، احتمال «کسب نمرهٔ کامل به شرط دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ بودن» است که با $P(A|B)$ نمایش داده می‌شود.

کار در کلاس

در فعالیت «قرعه‌کشی» احتمال شرطی کدام پیشامد نسبت به کدام پیشامد مورد سؤال قرار گرفته است؟

نمره ی کامل گرفتن به شرط آن که دانش آموز از کلاس ۱-۱۱ باشد به عبارت دیگر ($P(A|B)$

احتمال شرطی: کاهش فضای نمونه

باز هم به دو فعالیت قبل توجه کنید. در حالتی که فضای احتمال هم‌شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه، یعنی S، را کنار گذاشته و B را فضای نمونه تلقی کنیم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می‌شود.

کار در کلاس

فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش چند عضوی است؟ ۳۶ آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟ بله

ب) می‌دانیم که مجموع عدد دو پرتاب از ۹ بیشتر شده است. در این صورت، احتمال اینکه دست‌کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

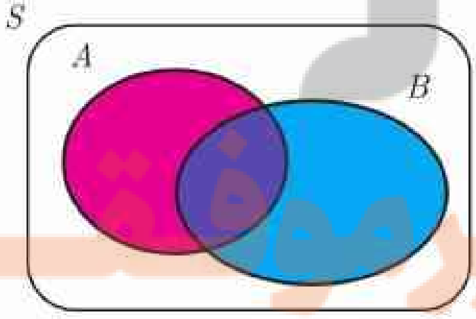
کاهشی $S = \{(۴,۶),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow n(S) = ۶$

$A = \{(۴,۶),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow n(A) = ۵$

$\Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۶}$

احتمال شرطی چگونه محاسبه می‌شود؟

همان‌طور که اشاره شد، اگر با احتمال هم‌شانس سر و کار داشته باشیم محاسبهٔ $P(A|B)$ ساده است؛ کافی است تعداد حالات مطلوب را به تعداد حالات ممکن تقسیم کنیم، ولی باید توجه داشته باشیم که چون می‌دانیم B رخ داده است دیگر همهٔ اعضای پیشامد A ممکن نیستند و لذا مجموعهٔ حالت‌های مطلوب در این وضعیت $A \cap B$ است. پس



$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

ولی در حالت کلی که احتمال می‌تواند هم‌شانس نباشد چه باید کرد؟

فعالیت

دوباره فرض کنید موضوع گفت‌وگوی احتمال هم‌شانس باشد؛ آیا می‌توانید سمت راست فرمول احتمال شرطی در حالت هم‌شانس را به شکلی بازنویسی کنید که به جای تعداد اعضای پیشامدها احتمال آنها آمده باشد؟

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

اگر فعالیت قبل را به‌درستی انجام داده باشید، به تعریف کلی احتمال شرطی (برای فضاهای هم‌شانس و فضاهای غیرهم‌شانس) رسیده‌اید :

در صورتی‌که B پیشامدی باشد که $P(B)>0$، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ دادن B» (که آن را «P ی A به شرط B» نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تذکر : در حالتی که $P(B)=0$، احتمال هیچ پیشامدی به شرط B تعریف نمی‌شود.

مثال : سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم که دست‌کم یک بار رو آمده است. در این صورت، احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

حل : سه بار رو آمدن سکه را A و دست‌کم یک بار رو آمدن سکه را B می‌نامیم. باید $P(A|B)$ را حساب کنیم. پس با توجه به تعریف باید $P(A\cap B)$ و $P(B)$ را محاسبه کنیم. فضای نمونه ۸ عضوی است و پیشامد $A\cap B$، یعنی سکه سه بار رو آمده باشد و به‌علاوه دست‌کم یک بار رو آمده باشد و این در واقع یعنی سکه در هر سه پرتاب رو آمده باشد. پس

$$P(A\cap B)=\frac{1}{8}$$

برای محاسبهٔ $P(B)$ بهتر است به پیشامد متمم آن توجه کنیم؛ پیشامد B' یعنی سکه اصلاً رو نیامده باشد که فقط یک حالت است. در نتیجه :

$$P(B)=1-P(B')=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

و لذا

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{1}{7}$$

مثال : دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد چقدر است؟

حل : الف) فرض کنید پیشامد A یعنی تاس سبز ۶ بیاید و پیشامد B یعنی مجموع دو تاس ۱۰ شود. پس در این مثال، $P(A|B)$ خواسته شده است و لذا باید $P(A\cap B)$ و $P(B)$ را محاسبه کنیم. فضای نمونه ۳۶ عضو دارد و یک فضای

هم‌شانس است پس باید تعداد اعضای یک پیشامد را برای رسیدن به احتمال آن به‌دست آوریم. روشن است که $B=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$ و درنتیجه: $P(B)=\frac{3}{36}$.

روشن است که $A\cap B=\{(6,4)\}$ و لذا $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$.

در نتیجه: $P(A|B)=\frac{1}{3}$.

ب) طبق نمادگذاری قسمت قبل، باید $P(B|A)$ را محاسبه کنیم. توجه داشته باشید که $P(A)=\frac{1}{6}$. پس

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$$

مثال: تیم ملی والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن‌ها را به‌تصادف انتخاب کنیم.

الف) احتمال اینکه آن بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

ب) بازیکن دیگری را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از بازیکن اوّل کوتاه‌قدتر است. در این صورت، احتمال اینکه بازیکن اوّل بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

حل: پاسخ قسمت (الف) ساده است؛ با توجه به اینکه یکی از ۱۴ بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم است، احتمال اینکه آن فرد همان باشد که ما تصادفاً انتخاب کرده‌ایم $\frac{1}{14}$ است.

برای به دست آوردن پاسخ قسمت (ب) دو پیشامد A و B را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

A: بازیکن اوّل بلندقدترین بازیکن تیم است.

B: بازیکن اوّل بلندقدتر از بازیکن دوم است.

$$\underbrace{\cancel{P(B|A)}}_{P(A|B)}=\frac{P(A\cap B)}{\underbrace{\cancel{P(A)}}_{P(B)}}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}$$

دلیل اینکه $P(B)=\frac{1}{2}$، این است احتمال اینکه بین دو بازیکن اوّلی یا دومی بلندقدتر باشد، برابر است.

کار در کلاس

در فعالیت مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم آمده بود که سه کلاس ۱ـ۱۱، ۲ـ۱۱ و ۳ـ۱۱ به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند و در آزمون مشترک در این سه کلاس به‌ترتیب ۹، ۸ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. دانش‌آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد «دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ بودن» را B_1 می‌نامیم و B_2 و B_3 را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با A نمایش می‌دهیم.

الف) مقدار $P(A|B_i)$ را برای $i=1,2,3$ محاسبه کنید.

$$P(A|B_1)=\frac{n(A\cap B_1)}{n(B_1)}=\frac{8}{32} \text{ و } P(A|B_2)=\frac{n(A\cap B_2)}{n(B_2)}=\frac{9}{32} \text{ و } P(A|B_3)=\frac{n(A\cap B_3)}{n(B_3)}=\frac{6}{35}$$

ب) مقدار $P(B_i|A)$ را برای $i=1,2,3$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده‌اید چیست؟

$$P(B_1|A)=\frac{n(B_1\cap A)}{n(A)}=\frac{8}{23} \text{ و } P(B_2|A)=\frac{n(B_2\cap A)}{n(A)}=\frac{9}{23} \text{ و } P(B_3|A)=\frac{n(B_3\cap A)}{n(A)}=\frac{6}{23}$$

$P(B_1|A)$ احتمال اینکه فردی با نمره ی کامل از کلاس B_1 باشد را مشخص می کنند که همان میزان موفقیت هر کلاس در آزمون است .

پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش‌آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق‌تر می‌دانید؟ **کلاس ۱-۱۱**

برای پاسخ دادن به این سؤال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (ب)؟ **پاسخ الف**

کار در کلاس

فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. نشان دهید :

اثبات در صفحه ی بعد می باشد .

الف) اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند :

$$P((A_1\cup A_2)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

ب) برای هر پیشامد A داریم : $P(A'|B)=1-P(A|B)$.

دانستن تعریف احتمال شرطی و درک درستی از مفهوم آن برای حلّ مسائل، احتمال لازم است، ولی کافی نیست. در ادامه، با سه ابزار آشنا می‌شویم که در حلّ مسائل احتمال بسیار مفیدند. این سه ابزار «قانون ضرب احتمال»، «قانون احتمال کل» و «قانون بیز» هستند. هر سه مورد را، در برخی کتاب‌ها با عنوان «قضیه» و «فرمول» نیز می‌شناسند. توجه داشته باشید که شما علاوه بر اینکه باید با این سه قانون آشنا شوید، این را هم باید بیاموزید که هر کدام در چه مواردی به کار می‌آیند.

برای یادگیری بهتر هر قانون، مثال‌هایی مطرح خواهد شد که برخی به‌قدری ساده‌اند که با روش‌های قبلی نیز قابل حل کردن هستند. انتخاب چنین مثال‌هایی به این دلیل است که مطلب در ابتدا در ذهن شما به‌درستی جا بیفتد. در ادامه برخی مثال‌های پیچیده‌تر هم آمده است، تا در استفاده از این ابزارها متبحرتر شوید.

در برخی مثال‌ها، سعی شده است که صورت مسئله تا حدّی شبیه یک مسئلهٔ واقعی باشد. در چنین مثال‌هایی فهم درست صورت مسئله و تبدیل درست آن به یک مسئلهٔ احتمال و تشخیص پیشامدهای مورد بحث و نام‌گذاری مناسب، بخشی از حلّ مسئله است و شما باید این کار را هم به‌خوبی فرا بگیرید.

قانون ضرب احتمال

تعریف احتمال شرطی، با یک محاسبهٔ ساده به عبارتی تبدیل می‌شود که به آن «قانون ضرب احتمال» گفته می‌شود :

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A)>0$، آن‌گاه $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$.

از این قانون، معمولاً وقتی استفاده می‌شود که بخواهیم عبارت سمت چپ تساوی را حساب کنیم.

مثال : در کیسه‌ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز است. از کیسه دو گوی به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه گوی اول سبز و گوی دوم سفید باشد، چقدر است؟

حل : پیشامد سبز بودن گوی اول را A و پیشامد سفید بودن گوی دوم را B می‌نامیم. در این صورت، آنچه خواسته شده $P(A\cap B)$ است. با توجه به قانون ضرب احتمال باید $P(A)$ و $P(B|A)$ را به دست آوریم. در ابتدا ۶ گوی در کیسه است که یکی از آنها سبز است. پس $P(A)=\frac{1}{6}$.

پاسخ کار در کلاس صفحه ی ۵۶ :

الف) دو پیشامد A_1 و A_2 طبق فرض ناسازگار هستند در نتیجه دو پیشامد $A_1 \cap B$ و $A_2 \cap B$ نیز ناسازگار هستند . زیرا :

$$(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = (A_1 \cap A_2) \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing$$

در نتیجه $P\big((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\big) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$ خواهد بود .

بنابراین به اثبات حکم می پردازیم :

$$P\big((A_1 \cup A_2)|B\big) = \frac{P\big((A_1 \cup A_2) \cap B\big)}{P(B)} = \frac{P\big((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\big)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

ب) می دانیم A و A' دو پیشامد ناسازگار بوده و $P(A \cup A'|B) = P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{B \subseteq S} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

بنابراین با توجه به قسمت الف ، به اثبات حکم می پردازیم :

$$P\big((A \cup A')|B\big) = P(A|B) + P(A'|B) \Rightarrow 1 = P(A|B) + P(A'|B) \Rightarrow P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

برای محاسبهٔ $P(B|A)$ توجه کنید که بعد از خارج کردن گوی اوّل، با این شرط که آن گوی سبز باشد، ۵ گوی در کیسه مانده که ۳ تا از آنها سفید است، درنتیجه : $P(B|A)=\frac{3}{5}$.

پس $P(A\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=0/1$.

قانون ضرب احتمال را می‌توان به‌راحتی برای سه پیشامد نیز نوشت :

اگر A_1 ، A_2 و A_3 پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند، آن‌گاه

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1\cap A_2))$$

در یکی از تمرین‌های پایانی درس از شما خواسته شده تا این قانون را ثابت کنید.

کار در کلاس

با داده‌های مثال قبل، اگر سه گوی را به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج کنیم، احتمال اینکه اوّلی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

قسمتی از راه‌حل، مشابه مثال قبلی است. کافی است C را پیشامد قرمز بودن گوی سوم بگیریم. در این صورت، باید $P(A\cap B\cap C)$ را به‌دست آوریم. با استفاده از قانون ضرب برای سه پیشامد، راه‌حل را ادامه دهید.

پیشامدسبز بودن گوی اول A ، پیشامد سفید بودن گوی دوم B و پیشامد قرمز بودن گوی سوم را C در نظر می گیریم در نتیجه :

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B|A)\times P(C|A\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{20}$$

کار در کلاس

بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰ درصد گُل می‌شود و اگر روحیه‌اش ضعیف باشد، احتمال گل شدن پرتابش ۶۰ درصد است. به‌علاوه می‌دانیم او اگر پرتابی را گل کند، در پرتاب بعدی روحیهٔ خوبی دارد و در غیر این صورت، روحیه‌اش ضعیف خواهد شد. فرض کنید بسکتبالیست، پیش از اوّلین پرتاب، روحیهٔ خوبی داشته باشد. احتمال اینکه از سه پرتاب متوالی، دقیقاً دو پرتاب آخر گل شود چقدر است؟

تصویر مربوط به تیم ملی بسکتبال با ویلچر کشورمان در بازی‌های پارالمپیک ۲۰۱۶ ریو است که در اولین دیدار خود ۶۹ بر ۶۳، تیم آلمان را شکست داد.

برای حلّ این مسئله، پیشامد گل شدن پرتاب iام را A_i بنامید. آنچه باید محاسبه کنید $P(A'_1\cap A_2\cap A_3)$ است.

با استفاده از فرضیات مسئله و قانون ضرب احتمال داریم :

$$P(A'_1\cap A_2\cap A_3)=P(A'_1)P(A_2|A'_1)P(A_3|A'_1\cap A_2)=0/1\times 0/6\times 0/9=0/054$$

چرا $P(A_3|A'_1\cap A_2)$ برابر ۰/۹ است؟ زیرا در پرتاب قبل از A_3 برنده شده و روحیه ی خوبی برای این پرتاب پیدا کرده است .

مثال : فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اوّل سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگرش قرمز است. کارتی را به‌تصادف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟

حل : فرض کنید :

A : کارت دو رو سبز است.

B : روی مشاهده‌شدهٔ کارت انتخابی سبز است.

باید $P(A\cap B)$ و $P(B)$ را محاسبه کنیم. واضح است که بعد از انتخاب یک کارت و نگاه کردن به یک روی آن، یکی از شش روی سه کارت را با احتمال‌های برابر، خواهیم دید و چون در مجموع سه روی سبز و سه روی قرمز داریم، پس

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

احتمال پیشامد $A\cap B$ را به‌راحتی می‌توان با استفاده از قانون ضرب به دست آورد :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

دلیل اینکه $P(A)$ برابر $\frac{1}{3}$ است، این است که از سه کارت، یکی دو رو سبز است و $\cancel{P(A|B)}=1$ چون اگر کارت انتخابی دو رو سبز باشد، روی مشاهده شده حتماً سبز است. در نتیجه : $P(A|B)=\frac{2}{3}$. $P(B|A)=1$

قانون احتمال کل

رسیدن از داده‌های جزئی به نتایج کلی بسیار معمول است؛ مثلاً اطلاعاتی آماری که در استان‌های کشور تهیه شده، می‌تواند بعد از انجام برخی محاسبات منجر به آمارهایی دربارهٔ کلّ کشور شود. یا اطلاعاتی در مورد رفتار ترافیکی گروه‌های مختلف سنی و جنسی را می‌توان جمع‌بندی کرد و به آماری دربارهٔ همهٔ رانندگان رسید. موضوع قانون احتمال کل چنین چیزهایی است.

فعالیت

دو کیسه داریم که اوّلی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب می کنیم و از آن گویی را برمی‌داریم. می‌خواهیم احتمال سفید بودن این گوی را محاسبه کنیم.

سه پیشامد A ، B_1 و B_2 را به شکل زیر تعریف می کنیم :

A : گوی برداشته شده سفید است.

B_1 : کیسهٔ اوّل انتخاب شده است.

B_2 : کیسهٔ دوم انتخاب شده است.

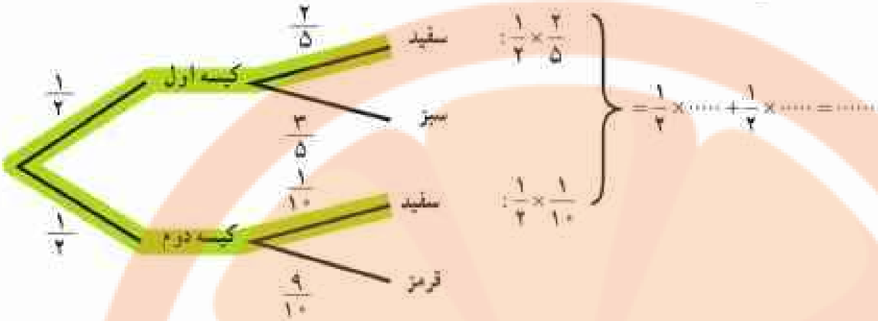
پس هدف محاسبه $P(A)$ است. طبق اطلاعات داده شده $P(A|B_1)$، $P(A|B_2)$، به‌ترتیب، برابر $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{10}$ هستند. به‌علاوه واضح است که $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$. چون کیسهٔ انتخابی یا کیسهٔ اوّل است یا کیسهٔ دوم. پس B_1 و B_2 فضای نمونه را افراز می‌کنند. این نتیجه می‌دهد که $A\cap B_1$ و $A\cap B_2$ نیز A را افراز می‌کنند. پس

$$\begin{aligned}P(A)&=P\big((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\big)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)\\&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

در محاسبات صفحهٔ قبل دو بار از قانون ضرب احتمال استفاده کردیم. «کجا؟»

در محاسبه ی $P(A\cap B_1)$ و $P(A\cap B_2)$ از قانون ضرب احتمال استفاده شده است.

نمودار درختی زیر، محاسبات را به شکل دیگری نمایش می‌دهد:



«قانون احتمال کل»، که شما در فعالیت قبل تلویحاً از آن استفاده کردید، به این شکل است:

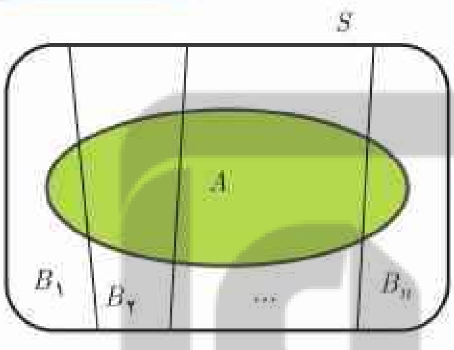
فرض کنید B_1، B_2، و ... B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\ldots+P(B_n)P(A|B_n)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k)$$

در فعالیت قبل، فضای نمونه به دو پیشامد B_1 و B_2 افراز شده بود؛ کیسهٔ انتخابی، یا کیسهٔ اوّل است، یا کیسهٔ دوم است.

کار در کلاس

با انجام مراحل زیر قانون احتمال کل را ثابت کنید:



۱ این فرض که B_1، B_2، و ... B_n فضای نمونه را افراز می‌کنند؛ یعنی دو به دو **مجزا از هم** هستند و $\bigcup_{k=1}^{n}B_k=S$.

۲ در این صورت $A\cap B_1$، $A\cap B_2$، و ... $A\cap B_n$ دو به دو **مجزا از هم** هستند و اجتماع آنها برابر A می‌شود. در نتیجه داریم

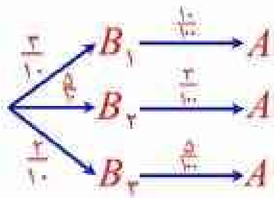
$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(A\cap B_i)$$

۳ اگر جملات داخل سیگما را به کمک قانون ضرب احتمال بازنویسی کنید، به قانون احتمال کل می‌رسید.

کار در کلاس

میوه‌فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه‌دار باشد، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق‌ها برمی‌داریم لکه‌دار باشد چقدر است؟

برای حلّ این مسئله گیریم B_1، B_2 و B_3، به‌ترتیب، این پیشامدها باشند که سیب انتخابی از باغ شمالی، باغ مرکزی و باغ جنوبی باشد. پیشامد A را نیز لکه‌دار بودن آن سیب تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم :



$$P(B_1)=\frac{۳}{۱۰}, \qquad P(B_2)=\frac{۵}{۱۰}, \qquad P(B_3)=\frac{۲}{۱۰}$$

و

$$P(A|B_1)=\frac{۱۰}{۱۰۰}, \quad P(A|B_2)=\frac{۳}{۱۰۰}, \quad P(A|B_3)=\frac{۵}{۱۰۰}$$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است $P(A)$ است که با استفاده از قانون احتمال کل به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۱۵}{۱۰۰}+\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۲۸}{۱۰۰}$$

با تکمیل محاسبات جواب به دست می‌آید.

می‌دانیم که B و B' فضای S را افراز می‌کنند؛ لذا ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت $n=۲$ به شکل زیر بیان می‌شود :

فرض کنید B پیشامدی باشد که $۰<P(B)<۱$. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم :

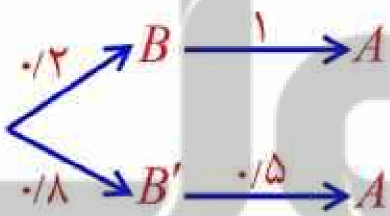
$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

مثال : دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم. احتمال اینکه آن رو قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد را که رنگ قرمز دیده شود A و این پیشامد را که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل داریم : $P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$

واضح است که $P(A|B)=۱$ و $P(A|B')=۰/۵$ و با توجه به تعداد، دو نوع کارت داریم

$$P(B)=\frac{۲}{۲+۸}=۰/۲\ ,\ P(B')=۱-۰/۲=۰/۸$$



پس $P(A)=۰/۲\times۱+۰/۸\times۰/۵=۰/۶$

قانون بیز

وقتی شما برای اوّلین‌بار با فردی آشنا می‌شوید، پیش‌فرض‌هایی از میزان صداقت او دارید. در طول زمان که اعمال و رفتار او را می‌بینید این پیش‌فرض‌ها به شکل مثبت یا منفی تغییر می‌کند. اگر مربی ورزش دانش‌آموزی را تحت نظر بگیرد، در ابتدا نسبت به توانایی او در ضربه زدن به توپ پیش‌فرض‌هایی دارد و هر چه بازی او را مشاهده کند، این پیش‌فرض‌ها تغییر می‌کند. قانون بیز که از مهم‌ترین قوانین در علم احتمال است، این موضوع را به زبان ریاضی فرمول‌بندی می‌کند.

خواندنی

توماس بیز[1] آماردان، فیلسوف و کشیش انگلیسی است که به دلیل فرمول‌بندی حالت خاصی از قانون بیز، معروف شده است. او البته هیچ‌گاه کارهایی که در نهایت منجر به قانون بیز شد را منتشر نکرد؛ بلکه بعد از مرگش ریچارد پرایس[2]، فیلسوف و ریاضی‌دان اهل ولز پس از ویرایش یادداشت‌های بیز آنها را منتشر کرد.

فعالیت

فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه این صندوق مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟ $\frac{1}{3}$ در مورد دو باغ دیگر این احتمال چقدر است؟ هر کدام $\frac{1}{3}$ است.

ب) اکنون سیبی را به تصادف از داخل صندوق انتخابی خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. آیا بعد از این مشاهده، نظر شما در مورد احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، تغییر کرده است؟

پ) به‌طور شهودی، فکر می‌کنید آیا این احتمال نسبت به قبل از مشاهدهٔ سیب لکه‌دار افزایش پیدا کرده است، یا کاهش؟ افزایش

در علم احتمال گاهی با مسائلی مانند فعالیت قبل مواجه هستیم که در آنها وقوع یک پیشامد، موجب تغییر نگرش ما به احتمال وقوع پیشامدهای دیگر می‌شود. شما در زندگی با این نوع مسائل، البته با نگاهی کیفی و نادقیق، مواجه بوده‌اید.

قانون بیز مشخص می‌کند که «احتمال‌های پیش از مشاهده» چگونه به «احتمال‌های پس از مشاهده» تبدیل می‌شوند. فرضیات قانون بیز کاملاً مشابه فرضیات قانون احتمال کل است:

فرض کنید B_1، B_2، و... B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

این قانون توضیح می‌دهد که چگونه $P(B_i)$ها بعد از مشاهدهٔ رخ دادن پیشامد A، به $P(B_i|A)$ها تبدیل می‌شوند.

گاهی قانون بیز را به شکل زیر می‌نویسند:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)}$$

هدف از این نوع نوشتن قانون بیز این است که تصریح شود در یک مسئلهٔ مربوط به قانون بیز معمولاً داده‌های موجود $P(B_i)$ها و $P(A|B_i)$ها هستند. توجه کنید که آنچه در مخرج عبارت سمت راست آمده است، طبق قانون احتمال کل، همان $P(A)$ است.

۱ــ Thomas Bayes (۱۷۰۲ ــ ۱۷۶۱)

۲ــ Richard Price (۱۷۲۳ ــ ۱۷۹۱)

ساده‌ترین حالت قانون بیز وقتی است که n برابر ۲ باشد. در این‌صورت، B_1 و B_2 دو پیشامد متمم‌اند.

فرض کنید B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A :

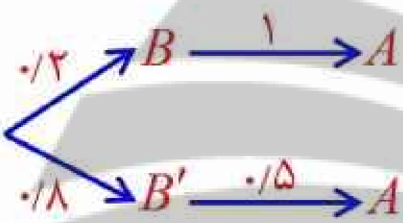
$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')}$$

اگر احتمال B صفر، یا یک باشد چه مشکلی در فرمول بالا پیش می‌آید؟

اگر $P(B)$ صفر شود $P(A|B)$ تعریف نشده است و در صورتی که $P(B)=1$ آنگاه $P(B')=0$ و در نتیجه $P(A|B')$ تعریف نشده است.

مثال : دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد که رنگ قرمز دیده شود را A و این پیشامد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد را B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. با توجه به اینکه B و B' فضای نمونه را افراز می‌کنند داریم :



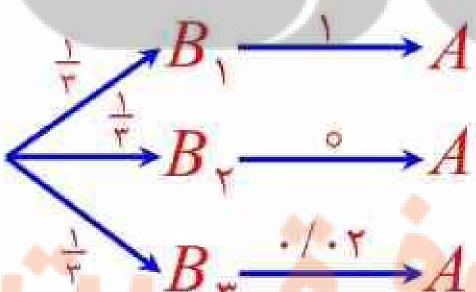
$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=0/2\times1+0/8\times0/5=0/6$$

توجه کنید که پیشامد B' یعنی کارت انتخابی دو رو قرمز نباشد و به همین دلیل احتمال آن ۰/۸ است. طبق قانون بیز داریم :

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{0/2\times1}{0/6}=\frac{1}{3}$$

مثال : سه صندوق سیب، هر کدام شامل ۱۰۰ سیب داریم. سیب‌های صندوق اوّل سبز؛ سیب‌های صندوق دوم، قرمز است. صندوق سوم شامل ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید دست در صندوق کنیم و سیبی را تصادفاً در آوریم و ببینیم که سبز است. احتمال اینکه همهٔ سیب‌های صندوق سبز باشند چقدر است؟

حل : فرض کنید پیشامد A، یعنی سیب مشاهده‌شده سبز باشد و پیشامدهای B_1، B_2 و B_3 به‌ترتیب به معنای انتخاب صندوق‌های اوّل، دوم و سوم باشند. لذا $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$



و $P(A|B_1)=1$ و $P(A|B_2)=0$ و $P(A|B_3)=\frac{2}{100}=0/02$

برای محاسبهٔ $P(B_1|A)$ ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم. طبق قانون احتمال کل

$$P(A)=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times0+\frac{1}{3}\times0/02=0/34$$

در نتیجه : $$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{0/34}=\frac{1}{1/02}=0/9804$$

کار در کلاس

فرض کنید سه صندوق سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه‌دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سیبی را از آن صندوق خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. در این صورت، احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

برای حلّ این مسئله، این پیشامد را که سیب انتخابی لکه‌دار باشد با A و اینکه صندوق انتخابی مربوط به سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی باشند را به‌ترتیب با $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ نمایش دهید.

در صورت مسئله چه احتمال‌هایی مشخص شده است؟ آنها را مشخص می‌کنیم :

$$P(B_۱)=\frac{۱}{۳} \quad , \quad P(B_۲)=\frac{۱}{۳} \quad , \quad P(B_۳)=\frac{۱}{۳}$$

و

$$P(A|B_۱)=\frac{۱۰}{۱۰۰} \quad , \quad P(A|B_۲)=\frac{۳}{۱۰۰} \quad , \quad P(A|B_۳)=\frac{۵}{۱۰۰}$$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است $P(B_۱|A)$ است. ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+P(B_۳)P(A|B_۳)=\frac{۱۰}{۳۰۰}+\frac{۳}{۳۰۰}+\frac{۵}{۳۰۰}=۰/۰۶$$

در نتیجه :

$$P(B_۱|A)=\frac{P(B_۱)P(A|B_۱)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۰}{۱۰۰}}{۰/۰۶}=\frac{۵}{۹}$$

مثال : در یک کارخانهٔ شیر پاستوریزه، وقتی خط تولید سالم است، تنها ۲ درصد از پاکت‌ها کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر دارند، ولی وقتی یکی از قطعات اصلی خط تولید دچار عیب می‌شود، این مقدار به ۱۰ درصد افزایش پیدا می‌کند. تجربه نشان داده است که احتمال خراب شدن خط تولید که تقریباً همیشه ناشی از معیوب شدن آن قطعه است، پس از یک ماه، ۵ درصد است. ماه گذشته آخرین باری بوده است که مسئول فنی، خط تولید را به‌طور کامل سرویس کرده است.

مسئول کنترل کیفیت کارخانه، به تصادف یک پاکت شیر را مورد بررسی قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که حاوی کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر است. در این صورت احتمال خراب بودن خط تولید چقدر است؟

حل :

دو پیشامد A و B را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : حجم شیر پاکت انتخاب‌شده کمتر از ۲۹۷ سی‌سی است.

B : خط تولید خراب شده است.

در این صورت باید $P(B|A)$ را محاسبه کنیم. اطلاعات مسئله به این صورت خلاصه می‌شود :

$P(B) = ۰/۰۵$

$P(A|B) = ۰/۱$

$P(A|B') = ۰/۰۲$

زیرا $P(B)$ یعنی احتمال خراب بودن خط تولید، $P(A|B)$ یعنی احتمال اینکه یک پاکت کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر داشته باشد، به شرط آنکه خط تولید خراب شده باشد و $P(A|B')$ یعنی احتمال اینکه یک پاکت کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر داشته باشد، به شرط آنکه خط تولید سالم باشد.

طبق قانون بیز داریم :

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')} = \frac{۰/۰۵\times ۰/۱}{۰/۰۵\times ۰/۱ + ۰/۹۵\times ۰/۰۲}$$

$$= \frac{۵}{۲۴} = ۰/۲۰۸$$

یعنی مسئول کنترل کیفیت که ابتدا فقط ۵ درصد احتمال می‌داد که خط تولید خراب شده باشد، بعد از مشاهدهٔ یک پاکت با محتویات کمتر از ۲۹۷ سی‌سی، ۲۰/۸ درصد احتمال می‌دهد که خط تولید خراب شده باشد.

تمرین

۱ دربارهٔ خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست‌کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

۲ ستاد مرکزی معاینهٔ فنّی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد : «امسال پرکارترین سال در عرصهٔ معاینهٔ فنّی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینهٔ فنّی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سال‌های مبارزه با آلودگی هوا بود ...»

در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینهٔ فنّی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه‌کرده و خودروهای مردودی در معاینهٔ فنّی باشد : (تعداد به هزار دستگاه است).

شمارهٔ مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه‌کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

۳ بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیرهٔ هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$

۵ قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبهٔ احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامهٔ تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامهٔ تراکتور داشته باشد چقدر است؟

۷ دو ظرف داریم. در اوّلی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اوّل یک مهره به‌طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

۸ در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک رانندهٔ مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام می‌دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

۹ در دو جعبه به‌ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اوّل ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از هرکدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به‌تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

۱۰ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

۱۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است.

اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

۱۲ قانون بیز را ثابت کنید :

$$P(B_i | A) \overset{?}{=} \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{P(A)}$$

راهنمایی : در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید، تا درستی آن را ببینید.

۱۳ با فرض شرایط قانون احتمال کل، ثابت کنید :

$$min \, \{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\} \le P(A) \le max \, \{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$$

۱۴ فرض کنید B و C دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A|B) \le P(A|C)$. ثابت کنید :

$$P(A|B) \le P(A|(B \cup C)) \le P(A|C)$$

۱۵ امیر و بابک عضو تیم ده نفرهٔ والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

۱۶ علی و مازیار هر کدام به‌ترتیب، با احتمال‌های ۰/۴ و ۰/۳ برای دیدن یک مسابقهٔ ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال ۰/۸ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

۱۷ خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسهٔ انتشاراتی‌اند که به‌ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به‌ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

۱۸ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شمارهٔ کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۱۹ یک شرکت بیمه، بیمه‌گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه «کم‌خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه‌گزاران پرخطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه‌گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه‌گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۱- **روش اول :** با توجه به این که حداقل یکی از فرزندان پسر است فضای نمونه ای به صورت زیر می باشد : (پسر= b و دختر=g)

$$S=\{bggg\ ,gbgg\ ,ggbg\ ,gggb\ ,bbgg\ ,bgbg\ ,bggb\ ,gbbg\ ,gbgb\ ,ggbb\ ,bbbg\ ,bbgb\ ,bgbb\ ,gbbb\ ,bbbb\}$$ کاهشی

$$A=\{bbgg\ ,bgbg\ ,bggb\ ,gbbg\ ,gbgb\ ,ggbb\}\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۱۵}=۰/۴$$

روش دوم : پیشامد حداقل یک پسر را با A نمایش داده و $P(A)=\frac{۱۵}{۱۶}$ است ، همچنین پیشامد دقیقاً دو پسر را با B نمایش داده و $P(B)=\frac{۶}{۱۶}$ است . از طرفی واضح است که $B\subseteq A$ و در نتیجه $A\cap B=B$. بنابراین :

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{۶}{۱۶}}{\frac{۱۵}{۱۶}}=\frac{۶}{۱۵}=۰/۴$$

۲- الف) از بین ۸۷۰ هزار خودروی مراجعه کننده ، ۲۵۸ هزار تای آنها مردود شده اند پس احتمال مردودی $\frac{۲۵۸}{۸۷۰}=\frac{۴۳}{۱۴۵}$ است .

ب) تعداد ۷۹ هزار خودرو مراجعه داشته که ۲۶ هزار تای آنها مردود است پس احتمال مردودی در این مرکز $\frac{۲۶}{۷۹}$ است .

پ) تعداد کل مردودی ها ۲۵۸ هزار بوده که ۲۶ هزار تای آنها مربوط به مرکز شماره ۵ است پس احتمال آن $\frac{۲۶}{۲۵۸}=\frac{۱۳}{۱۲۹}$ است .

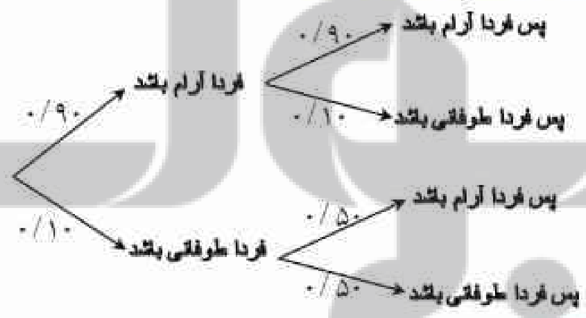
پ) روش دوم : پیشامد مردود شدن را با M و پیشامد مراجعه به مرکز شماره۵ را با N نمایش می دهیم در نتیجه :

$$P(N|M)=\frac{P(N\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{۲۶}{۸۷۰}}{\frac{۲۵۸}{۸۷۰}}=\frac{۲۶}{۲۵۸}=\frac{۱۳}{۱۲۹}$$

۳- نوع پرسش احتمال خواسته شده ابهام دارد : احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

آیا منظور هر دو روز آینده است یا فقط دومین روز در آینده می باشد ؟!

با فرض اینکه منظور ، فقط دومین روز در آینده (یعنی فقط پس فردا) است ، مسئله را حل می کنیم :



$$\Rightarrow P=(۰/۹۰\times ۰/۱۰)+(۰/۱۰\times ۰/۵۰)=۰/۱۴$$

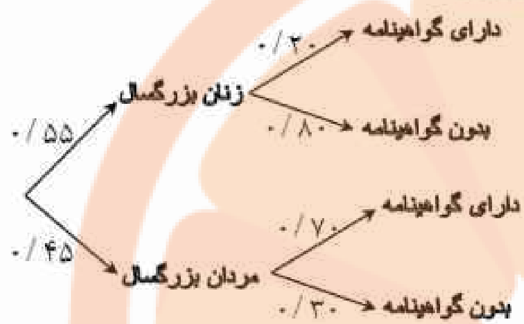
۴- $$\text{چپ}=P(A_۳\cap A_۱\cap A_۲)=P(A_۳\cap[A_۱\cap A_۲])=P(A_۱)\times\frac{P(A_۲\cap A_۱)}{P(A_۱)}\times\frac{P(A_۳\cap[A_۱\cap A_۲])}{P(A_۱\cap A_۲)}=\text{راست}$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۵- $$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=$$
$$P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1\cap A_2)\times P(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3)\times\cdots\times P(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

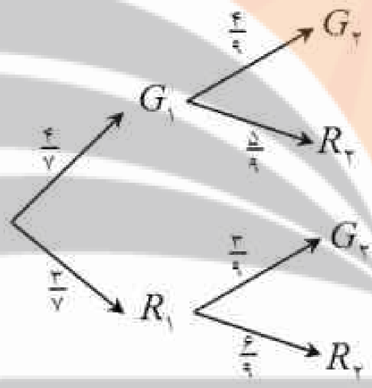
با توجه به خاصیت جابه جایی در اشتراک ، می توان $P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$ را به صورت $P(A_2\cap A_1\cap\cdots\cap A_n)$ و حالت های دیگر نوشت و آن را محاسبه نمود . تعداد حالات آن همان تعداد حالات جابه جایی A_iها می باشد که به $n!$ حالت می توان نوشت .

۶-



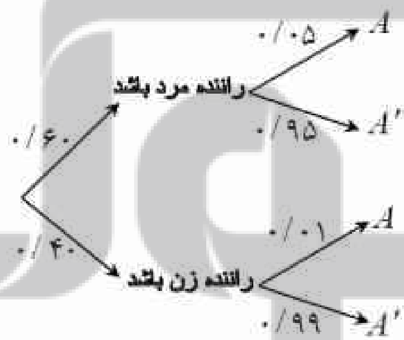
$$\Rightarrow P=۰/۵۵\times ۰/۲۰+۰/۴۵\times ۰/۷۰=۰/۴۲۵$$

۷- پیشامد اینکه مهره برداشته شده از ظرف اول سبز باشد را با G_1 و قرمز بودن آن را با R_1 ، همچنین برای مهره برداشته شده از ظرف دوم ، پیشامد سبز بودن را با G_2 و قرمز بودن را با R_2 نمایش می دهیم . بنابراین :



$$\Rightarrow P=\frac{4}{7}\times\frac{4}{9}+\frac{3}{7}\times\frac{3}{9}=\frac{25}{63}$$

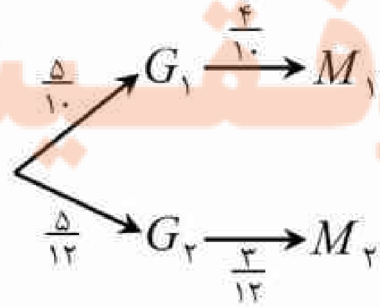
۸- پیشامد توقف روی خط عابر پیاده هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی را A و عدم توقف را A' در نظر می گیریم . بنابراین :



$$\Rightarrow P=۰/۶۰\times ۰/۰۵+۰/۴۰\times ۰/۰۱=۰/۰۳۴$$

۹- پیشامد اینکه لامپ انتخابی از جعبه اول باشد G_1 و پیشامد اینکه از جعبه دوم باشد را با G_2 نمایش می دهیم .

همچنین پیشامد معیوب بودن لامپ انتخابی در جعبه ی اول را با M_1 و در جعبه ی دوم با M_2 نمایش می دهیم . بنابراین :

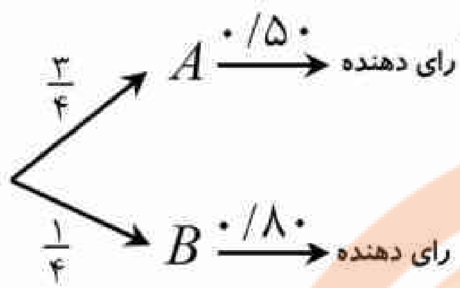


$$P(G_1)=\frac{5}{10}\quad و \quad P(G_2)=\frac{5}{12}\quad و \quad P(M_1)=\frac{4}{10}\quad و \quad P(M_2)=\frac{3}{12}$$

$$\Rightarrow P=\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{12}\times\frac{3}{12}=\frac{73}{240}$$

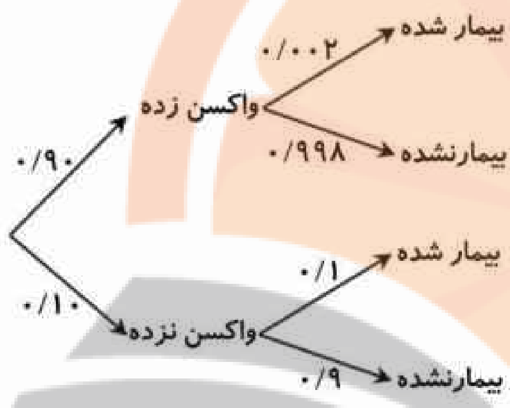
۱۰- احتمال واجد شرایط بودن در شهر A را با $P(A)$ و واجد شرایط بودن در شهر B را با $P(B)$ نمایش می دهید .

طبق فرض سوال $P(A)=۳P(B)$ در نتیجه $P(A)=\frac{۳}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۴}$ خواهد بود .



بنابراین با توجه به قانون بیز می توان نوشت :

$$\Rightarrow P=\frac{\frac{۳}{۴}\times ۰/۵۰}{\frac{۳}{۴}\times ۰/۵۰+\frac{۱}{۴}\times ۰/۸۰}=\frac{۱۵}{۲۳}$$



۱۱- ابتدا متناسب با مسئله نمودار رو به رو را رسم میکنیم .

سپس طبق قانون احتمال کل عمل می کنیم :

$$\Rightarrow P=۰/۹۰\times ۰/۰۰۲+۰/۱۰\times ۰/۱=۰/۱۱۸$$

۱۲-

$$\text{راست}=\frac{\cancel{P(B_i)}\times\frac{P(A\cap B_i)}{\cancel{P(B_i)}}}{P(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=P(B_i|A)=\text{چپ}$$

۱۳- طی دو مرحله نامساوی داده شده را اثبات می کنیم :

مرحله ی اول : باید نشان دهید $\min\{P(A|B_۱),P(A|B_۲),\dots,P(A|B_n)\}\le P(A)$ ، برای این منظور از برهان خلف استفاده می کنیم .

گیریم چنین نامساوی برقرار نباشد ، پس به ازای هر i ، $P(A|B_i)>P(A)$ یعنی $\frac{P(A\cap B_i)}{P(B_i)}>P(A)$ و در نتیجه $P(A\cap B_i)>P(A)\times P(B_i)$ است . بنابراین :

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B_۱)>P(A)\times P(B_۱)\\ P(A\cap B_۲)>P(A)\times P(B_۲)\\ \vdots\\ P(A\cap B_n)>P(A)\times P(B_n)\end{array}\right\}\xrightarrow{+}P(A)>P(A)\times\underbrace{\sum_{i=۱}^{n}P(B_i)}_{P(S)=۱}\Rightarrow P(A)>P(A)\to$$ تناقض است .

مرحله ی دوم : باید نشان دهید $P(A)\le\max\{P(A|B_۱),P(A|B_۲),\dots,P(A|B_n)\}$ ، برای این منظور از برهان خلف استفاده می کنیم .

گیریم این نامساوی برقرار نباشد ، پس به ازای هر i ، $P(A)>P(A|B_i)$ یعنی $P(A)>\frac{P(A\cap B_i)}{P(B_i)}$ و در نتیجه $P(A)\times P(B_i)>P(A\cap B_i)$ است . بنابراین :

$$\left.\begin{array}{l} P(A)\times P(B_1)>P(A\cap B_1) \\ P(A)\times P(B_2)>P(A\cap B_2) \\ \vdots \\ P(A)\times P(B_n)>P(A\cap B_n) \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \mathrm{P(A)}\times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)}_{P(S)=1} > P(A) \Rightarrow P(A)>\mathrm{P(A)} \rightarrow$$ تناقض است .

۱۴- **روش اول :** طی دو مرحله اثبات صورت می گیرد .

مرحله ی اول : ابتدا با استفاده از برهان خلف نشان می دهیم $P(A|B)\le P(A|B\cup C)$.

گیریم این نامساوی برقرار نباشد ، پس $P(A|B)>P(A|B\cup C)$ بوده و با توجه به فرضیات مسئله می توان نوشت :

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}>\frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)} \xrightarrow{B\cap C=\varnothing} \frac{P(A\cap B)}{P(B)}>\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\times(P(B)+P(C))>P(B)\times(P(A\cap B)+P(A\cap C))$$

$$\Rightarrow \cancel{(P(A\cap B)\times P(B))}+(P(A\cap B)\times P(C))>\cancel{(P(B)\times P(A\cap B))}+(P(B)\times P(A\cap C))$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\times P(C)>P(B)\times P(A\cap C)$$

$$\xrightarrow{\div P(B)P(C)} \frac{P(A\cap B)}{P(B)}>\frac{P(A\cap C)}{P(C)} \Rightarrow P(A|B)>P(A|C) \Rightarrow$$ با فرض سوال تناقض دارد

مرحله ی دوم : دقیقاً مشابه مرحله ی اول عمل کرده و به تناقض می رسیم .

روش دوم : نکته : به شرط مثبت بودن تمام متغیر ها ، اگر $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$ آنگاه $\frac{a}{b}\le\frac{a+c}{b+c}\le\frac{c}{d}$ خواهد بود .

بنابه فرض سوال $P(A|B)\le P(A|C) \Leftarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$ ، حال طبق نکته ی فوق می توان نوشت :

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)}\le\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$\Rightarrow P(A|B)\le\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)}\le P(A|C)$$

از طرفی با توجه به ناسازگار بودن B و C می دانیم $\mathrm{P}(A|(B\cup C))=\frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)}=\frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{\mathrm{P(B)+P(C)}}=\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{\mathrm{P(B)+P(C)}}$ که با جایگذاری آن در نامساوی فوق خواهیم داشت : $P(A|B)\le\mathrm{P}(A|(B\cup C))\le P(A|C)$.

۱۵- دو پیشامد A و B را به شکل زیر تعریف می کنیم :

A: امیر بلند قدترین عضو تیم است . $\Leftarrow P(A)=\frac{1}{10}$

B: امیر از بابک بلند قد تر است . $\Leftarrow P(B)=\frac{1}{2}$

احتمال اینکه امیر بلندقدترین باشد با فرض اینکه امیر از بابک بلندتر است $\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$

همچنین پیشامد C را تعریف می کنیم : امیر از نظر بلندی قد نفر نهم باشد ، یعنی بابک کوتاه قدترین باشد . $\Leftarrow P(C)=\frac{1}{10}$

احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد نفر نهم باشد با فرض اینکه امیر از بابک بلندتر است $\Rightarrow P(C|B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(C)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$

۱۶- پیشامد آنکه علی به ورزشگاه برود را A و پیشامد آنکه مازیار به ورزشگاه برود را M می نامیم . بنابراین :

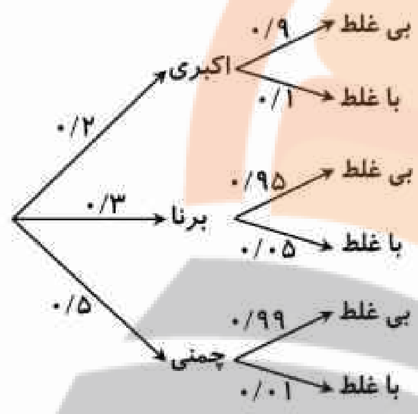
$$P(A)=۰/۴ \quad و \quad P(M)=۰/۳ \quad و \quad P(M|A)=۰/۸ \quad و \quad P(M'|A')=?$$

$$P(M\cap A)=P(A)\times P(M|A)=۰/۴\times ۰/۸=۰/۳۲$$

$$P(M\cup A)=P(M)+P(A)-P(M\cap A)=۰/۳+۰/۴-۰/۳۲=۰/۳۸$$

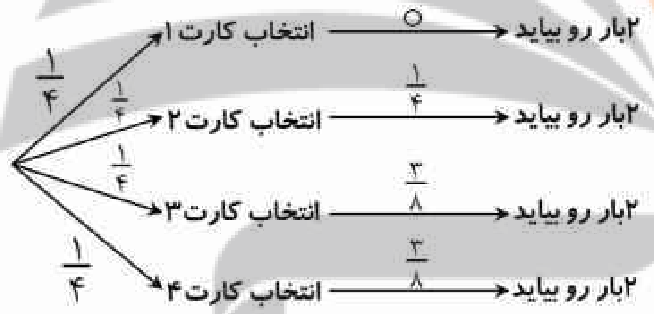
$$P(M'|A')=\frac{P(M'\cap A')}{P(A')}=\frac{۱-P(M\cup A)}{۱-P(A)}=\frac{۱-۰/۳۸}{۱-۰/۴}=\frac{۳۱}{۳۰}$$

۱۷- ابتدا نمودار روبرو را رسم می کنیم . سپس طبق قانون بیز می نویسیم :



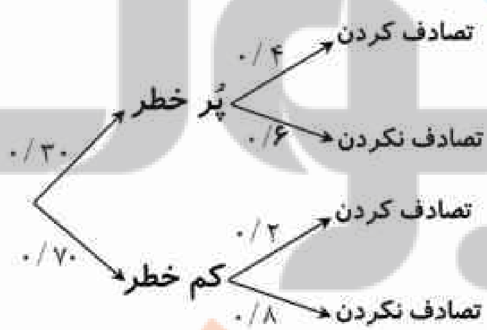
$$\Rightarrow P=\frac{۰/۲\times ۰/۱}{۰/۲\times ۰/۱+۰/۳\times ۰/۰۵+۰/۵\times ۰/۰۱}=۰/۵$$

۱۸- ابتدا نمودار روبرو را برای آن ترسیم می کنیم و بنا به قانون بیز :



$$\Rightarrow P=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۸}}{\frac{۱}{۴}\times ۰+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۸}}=\frac{۳}{۸}$$

۱۹- ابتدا نمودار روبرو را برای آن ترسیم می کنیم .



الف) $P=۰/۳\times ۰/۴+۰/۷\times ۰/۲=۰/۲۶$

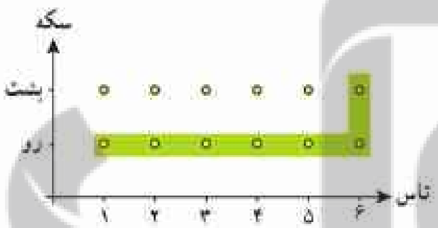
ب) طبق قانون بیز $P=\frac{۰/۴\times ۰/۳}{۰/۲۶}=\frac{۶}{۱۳}$

درس ۴ پیشامدهای مستقل و وابسته

دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم، سرشار از وقایعی است که به یکدیگر وابسته‌اند؛ مثلاً سونامی‌های بزرگ پس از زلزله‌های عظیم در داخل دریا اتفاق می‌افتند. بسیاری از رفتارهای انسانی نیز به یکدیگر وابسته‌اند؛ به‌عنوان مثال، اخلاق نیکوی یک فرد و روابط اجتماعی او به یکدیگر وابسته‌اند. از سوی دیگر بعضی از رخدادها به یکدیگر وابسته نیستند و اصطلاحاً، مستقل از یکدیگرند. آیا گروه خونی شما به گروه خونی دوستان وابسته است؟ البته تشخیص وابستگی و یا مستقل بودن خیلی از پیشامدها، واضح نیست و به ابزاری دقیق برای بررسی آنها نیاز داریم.

فعالیت

یک سکه و یک تاس را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشند.



۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را بنویسید.

$S=\{$(۱،ر)، (۲،ر)، (۳،ر)، (۴،ر)، (۵،ر)، (۶،ر)، (۱،پ)، (۲،پ)، (۳،پ)، (۴،پ)، (۵،پ)، (۶،پ)$\}$

$A=\{$(۶،ر)، (۶،پ)$\}$

$B=\{$(۱،ر)، (۲،ر)، (۳،ر)، (۴،ر)، (۵،ر)، (۶،ر)$\}$

$A\cap B=\{$(۶،ر)$\}$

۲ احتمال وقوع پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را تعیین کنید.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۲}\quad,\quad \mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}\quad,$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۲}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید، یعنی $\mathrm{P}(A|B)$ را به دست آورید.

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۶}{۱۲}}=\frac{۱}{۶}$$

۴ با مقایسهٔ $P(A|B)$ و $P(A)$، آیا وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع پیشامد A داشته است؟

هر دو احتمال با هم برابر شده اند ، ظاهراً شرط B روی آن تاثیر نداشته است .

۴ اگر $P(A|B)=P(A)$، چه رابطه‌ای بین $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cap B)$ برقرار است؟

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

۵ در تساوی $P(A|B)=P(A)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $P(B|A)=P(B)$ را نتیجه بگیرید.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\cancel{P(A)}.P(B)}{\cancel{P(A)}}=P(B)$$

پیشامدهای A و B را **مستقل** می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر

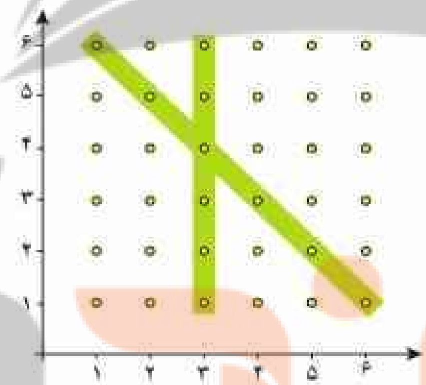
$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، **وابسته** نامیده می‌شوند.

اگر $P(A)$ و $P(B)$ ناصفر باشند، برقراری تساوی $P(A|B)=P(A)$ و یا تساوی $P(B|A)=P(B)$ نیز مستقل بودن A و B را نتیجه می‌دهد. در فعالیت بالا، $P(A|B)=P(A)$، بنابراین، پیشامدهای A و B مستقل‌اند. مستقل بودن این دو پیشامد، یعنی رو آمدن سکه و ۶ آمدن تاس، بدون محاسبه احتمال‌ها نیز قابل مشاهده است، ولی مستقل بودن از پیشامدها چندان واضح نیست.

مثال ۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهدهٔ عدد ۳ در تاس اوّل و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن A و B را بررسی می‌کنیم.

برآمد هر تاس ۶ حالت دارد. بنابراین، فضای نمونه‌ای این آزمایش $n(S)=۶\times۶=۳۶$ عضو دارد. اکنون پیشامدهای A، B و $A\cap B$ و احتمال های آنها را به دست می‌آوریم.



$$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}$$
$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶},$$

$$B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$
$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶},$$
$$A\cap B=\{(۳,۴)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

پس $P(A\cap B)=P(A)P(B)$، بنابراین پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند.

مستقل بودن بسیاری از پیشامدها نیاز به بررسی ندارد؛ به عنوان مثال، قبولی در یک درس برای دو نفر، یا جنسیت فرزندان یک خانواده مستقل از یکدیگرند. از استقلال این پیشامدها می‌توانیم در حلّ مسائل استفاده کنیم.

مثال ۲) احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷۰ درصد است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود، را به دست می‌آوریم.

اگر $P(A)$ احتمال قبولی زهرا و $P(B)$ احتمال قبولی ریحانه در این درس باشد، احتمال قبولی حداقل یکی از آنها، همان $P(A\cup B)$ است و می‌دانیم که :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

با توجه به مستقل بودن A و B، $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=۰/۹+۰/۷-۰/۶۳=۰/۹۷$$

کار در کلاس

۱ سکهٔ سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهدهٔ فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید. پشت $=P$ و رو $=R$ بنابراین:

$A=\{PRP,PRR,RRP,RRR\}\Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

$B=\{RRP,PRR\}\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$ و $A\cap B=\{RRP,PRR\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A).P(B)\Rightarrow$ دو پیشامد مستقل نیستند.

۲ در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اول و B را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا A و B مستقل‌اند؟

$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$ و $A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=۰$

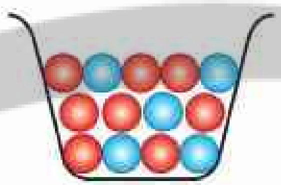
$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$

۳ در یک مسابقهٔ تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

$P(\text{محمد})=\frac{۵}{۷}\quad P(\text{مرتضی})=\frac{۷}{۱۰}\Rightarrow P(\text{محمد}\cap\text{مرتضی})=\frac{۵}{۷}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$

انتخاب‌های با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری

مثال ۳) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز است، دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جای‌گذاری، بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهرهٔ اول و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد،



الف) احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟

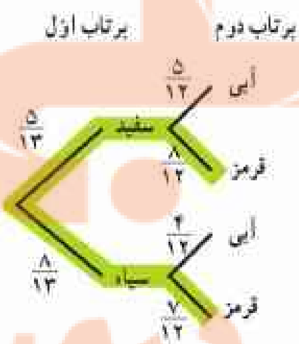
ب) پیشامدهای A و B مستقل‌اند یا وابسته؟

حل) با توجه به رابطهٔ $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ در احتمال شرطی داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}$$

برای بررسی وابستگی یا استقلال این پیشامدها، $P(B)$ و $P(B|A)$ را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. برای محاسبهٔ $P(B)$ از قانون احتمال کلی استفاده کرده و نمودار درختی انتخاب مهره‌ها و تعیین حالت مطلوب را نیز محاسبه کرده‌ایم.

$$P(B)=P(\text{مهرهٔ دوم قرمز})$$
$$=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')$$
$$=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}$$
$$=\frac{۸}{۱۳}$$



از سوی دیگر $P(B|A)=\frac{۸}{۱۲}$ ، پس $P(B|A)\neq P(B)$ ، بنابراین A و B وابسته‌اند.

کار در کلاس

در مثال صفحهٔ قبل، اگر مهرهٔ دوم را پس از جای‌گذاری مهرهٔ اول در جعبه بیرون آوریم. با محاسبهٔ $P(B)$ و $P(B|A)$، مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید. **واضح است که** $P(B)=\frac{۸}{۱۲}$.

با توجه به جایگذاری مهره ی اول ، تعداد کل مهره ها ۱۲ مانده و درنتیجه $P(B|A)=\frac{۸}{۱۲}$ **. بنابراین** $P(B)=P(B|A)$
یعنی دو پیشامد مستقل از یکدیگرند .

مستقل بودن پیشامدهای A و B در کار در کلاس بالا قابل حدس زدن است؛ زیرا با جای‌گذاری مهرهٔ اول انتخاب شده در جعبه، شرایط برای انتخاب مهرهٔ دوم، دقیقاً همانند انتخاب مهرهٔ اول است و در حقیقت آزمایش اول تکرار می‌شود. در حالت کلی، انتخاب‌هایی که با جای‌گذاری انجام می‌شوند، مستقل‌اند.

مفهوم استقلال برای بیش از دو پیشامد نیز تعریف می‌شود.

سه پیشامد A، B و C را مستقل می‌گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی، n پیشامد $A_1, A_2, \ldots, A_n$ را مستقل می‌گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل‌ضرب احتمال آنها برابر باشد.

مثال ۴) خانواده‌ای ۴ فرزند دارد.

الف) احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

حل الف) فرض کنید A پیشامد این باشد که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان، داریم:

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\text{دختر، دختر، دختر، دختر})\\&=P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})\\&=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\\&=\frac{۱}{۱۶}\end{aligned}$$

حل ب) مشابه بالا، اگر B پیشامد دختر بودن فقط فرزند اول و آخر این خانواده باشد، سپس:

$$\begin{aligned}P(B)&=P(\text{دختر، پسر، پسر، دختر})\\&=P(\text{دختر})\times P(\text{پسر})\times P(\text{پسر})\times P(\text{دختر})\\&=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\\&=\frac{۱}{۱۶}\end{aligned}$$

اکنون فرض کنید C پیشامد وجود دو دختر در این خانواده باشد، یکی از حالت‌ها به صورت زیر است :

فرزند اوّل	فرزند دوم	فرزند سوم	فرزند چهارم
دختر	پسر	دختر	پسر

و احتمال پیشامد بالا عبارت است از :

$$\mathrm{P}(\text{دختر، پسر، دختر، پسر}) = \mathrm{P}(\text{دختر}) \times \mathrm{P}(\text{پسر}) \times \mathrm{P}(\text{دختر}) \times \mathrm{P}(\text{پسر}) = \frac{۱}{۱۶}$$

قرار گرفتن دو دختر در این خانواده، به $۶=\binom{۴}{۲}$ حالت میسر است و احتمال هر کدام از این حالت‌ها، همان $\frac{۱}{۱۶}$ است،

بنابراین : $\mathrm{P}(C) = ۶\times\frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$

مثال ۵) ۸۰ درصد افراد شهری با سوادند، ۵ نفر از این شهر انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه هر ۵ نفر بی‌سواد باشند را به دست می‌آوریم. احتمال اینکه اوّلین نفر بی‌سواد باشد، ۲۰ درصد یا ۰/۲ است. با توجه به اینکه جای‌گذاری انجام نشده است، بی‌سواد بودن فرد دوم مستقل از بی‌سوادی فرد اوّل نیست، ولی چون انتخاب از یک جامعه پر جمعیت انجام می‌شود، می‌توان فرض کرد که بی‌سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی‌سواد بودن هر کدام از آنها ۰/۲ است. پس :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{هر پنج نفر بی‌سواد}) &= \mathrm{P}(\text{نفر اول بی‌سواد}) \times \mathrm{P}(\text{نفر دوم بی‌سواد}) \times \mathrm{P}(\text{نفر سوم بی‌سواد}) \times \mathrm{P}(\text{نفر چهارم بی‌سواد}) \times \mathrm{P}(\text{نفر پنجم بی‌سواد})\\ &= (۰/۲)^۵\\ &= ۰/۰۰۰۳۲\end{aligned}$$

تمرین

۱ اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

۳ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

الف) A' و B

ب) A' و B'

۴ در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اوّل باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۵ از مجموعهٔ $\{۱، ۲، ۳، \ldots، ۱۰\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار $۰/۶$ و روی بیمار دیگر $۰/۸$ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه :

الف) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

ب) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

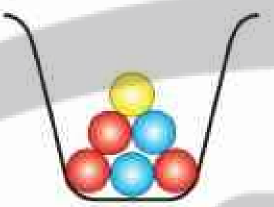
۷ یک سکه و دو تاس به‌طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هردو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

۸ در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به‌دست آورید که :

الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

ب) تنها به پنج سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد.

پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.



۹ در یک جعبه که شامل ۳ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر دو مهره قرمز باشند.

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

پ) هر دو مهره همرنگ باشند.

۱۰ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که :

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

۱۱ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، $۰/۹$ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همهٔ افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

۱۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری‌که $P(A\cap B)=۰/۱$ و $P(A\cap B')=۰/۴$، حاصل $P(A\cup B')$ را به‌دست آورید.

۱- خیر دو پیشامد ناسازگار ، درصورتی مستقل از یکدیگرند که حداقل یکی از آنها تُهی باشد .

اثبات : فرض کنیم دو پیشامد A و B ناسازگار مستقل باشند ، بنابراین :

$$\left.\begin{matrix} P(A\cap B)=0 \\ P(A\cap B)=P(A).P(B)\end{matrix}\right\} \Rightarrow P(A).P(B)=0 \Rightarrow P(A)=0 \vee P(B)=0$$

۲- خیر ، در نظر بگیرید $S=\{a,b,c,d\}$ فضای نمونه و $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,c\}$ دو پیشامد از آن باشند .

$$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{2},A\cap B=\{a\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{4}\Big) \rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow$$ A و B مستقلند

پیشامد های $E=\{a\}$ و $F=\{c\}$ به ترتیب زیر مجموعه های A و B را در نظر می گیریم :

$$P(E)=\frac{1}{4},P(F)=\frac{1}{4},E\cap F=\varnothing\Rightarrow P(E\cap F)=0\Big) \rightarrow P(E\cap F)\neq P(E)P(F)\Rightarrow$$ E و F مستقل نیستند

۳- فرض کنیم دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S مستقل باشند در نتیجه $P(A\cap B)=P(A).(B)$.

الف) با توجه به فرض ، نشان می دهیم $P(B\cap A')=P(B).P(A')$:

$$P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A).P(B)=P(B)(1-P(A))=P(B).P(A')$$

نتیجه : اگر دو پیشامد مستقل باشند ، آنگاه هر کدام از آنها مستقل از متمم دیگری است .

ب) **روش اول** : طبق قسمت قبل A' و B مستقل هستند ، از طرفی بنا به نتیجه ی آن ، هر کدام از پیشامد ها مستقل از متمم دیگری است ، یعنی A' مستقل از متمم B خواهد بود ، پس A' و B' مستقلند .

روش دوم : با توجه به قسمت الف ، نشان می دهیم $P(A'\cap B')=P(A').P(B')$:

$$P(A'\cap B')=P(A'-B)=P(A')-P(A'\cap B)=P(A')-P(A')P(B)=P(A')(1-P(B))=P(A').P(B')$$

روش سوم : بدون استفاده از قسمت الف ، به کمک فرض سوال اثبات می کنیم $P(A'\cap B')=P(A').P(B')$:

$$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-P(A)-P(B)+P(A).P(B)$$
$$=1-p(A)-P(B)(1-P(A))=P(A')-P(B).P(A')=P(A')(1-P(B))=P(A').P(B')$$

۴-

$$A=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}\Rightarrow P(A)=\frac{10}{36}$$

$$B=\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}\Rightarrow P(B)=\frac{6}{36}$$

$A \cap B = \{(۳,۲),(۳,۴)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۲}{۳۶}$

$\Rightarrow \frac{۱۰}{۳۶} \times \frac{۶}{۳۶} \neq \frac{۲}{۳۶} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A).P(B) \Rightarrow$ دو پیشامد مستقل از هم نیستند .

۵- $A = \{۲,۴,۶,۸,۱۰\} \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۱۰}$ و $B = \{۳,۶,۹\} \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۱۰}$

$A \cap B = \{۶\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۱۰}$

$\Rightarrow \frac{۵}{۱۰} \times \frac{۳}{۱۰} \neq \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A).P(B) \Rightarrow$ دو پیشامد مستقل از هم نیستند .

۶- پیشامد موفقیت عمل پیوند کلیه روی بیمار اول را با A و بیمار دوم را با B نمایش می دهیم . با توجه به مستقل بودن آنها داریم :

الف) $P(A) = ۰/۶ \quad , \quad P(B) = ۰/۸ \quad \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) = ۰/۶ \times ۰/۸ = ۰/۴۸$

ب) طبق آنچه در تمرین ۳ ثابت شد ، هر گاه دو پیشامد مستقل باشند ، متمم آنها نیز مستقلند ، بنابراین :

$P(A') = ۰/۴ \quad , \quad P(B') = ۰/۲ \quad \Rightarrow P(A' \cap B') = P(A').P(B') = ۰/۴ \times ۰/۲ = ۰/۰۸$

پ) طبق تمرین ۳ ، هر گاه دو پیشامد مستقل از هم باشند ، هر کدام از آنها مستقل از متمم دیگری است . بنابراین :

$P(A') = ۰/۴ \quad , \quad P(B) = ۰/۸ \quad \Rightarrow P(A' \cap B) = P(A').P(B) = ۰/۴ \times ۰/۸ = ۰/۳۲$

۷- پیشامد رو بودن سکه را با A و پیشامد ۶ آمدن هر دو تاس را با B نمایش می دهیم . واضح است که این دو پیشامد مستقل از یکدیگرند بنابراین

احتمال اینکه سکه رو و هر دو تاس ۶ بیایند : $P(A) = \frac{۱}{۲} \quad , \quad P(B) = \frac{۱}{۳۶} \quad \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳۶} = \frac{۱}{۷۲}$

۸- الف) احتمال اینکه هر سوال را صحیح پاسخ دهد $\frac{۱}{۵}$ است . از طرفی پیشامد های پاسخ دادن به هر سوال مستقل از سوال دیگر است . بنابراین

احتمال پاسخ صحیح دادن تمام سوال ها برابر است با : $\frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \cdots \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۵^{۱۰}}$

ب) احتمال اینکه به هر سوال پاسخ صحیح دهد $\frac{۱}{۵}$ و پاسخ غلط دهد $\frac{۴}{۵}$ است . بنابر این :

$$\frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} = \frac{۴^۵}{۵^{۱۰}} = (۰/۴)^{۱۰}$$

پ) این سوال مشابه قسمت ب حل می شود با این تفاوت که باید از بین ۱۰ سوال ۵ سوال را برای پاسخ صحیح دادن برگزید یعنی $\binom{۱۰}{۵}$ حالت

وجود دارد ، در نتیجه احتمال آن برابر است با : $\binom{۱۰}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} = \frac{۴^۵}{۵^{۱۰}} = \binom{۱۰}{۵}(۰/۴)^{۱۰}$

۹- الف) با در نظر گرفتن اینکه بیرون آوردن مهره ها با جایگذاری است ، پیشامد برای هر مهره مستقل از مهره ی دیگر است .

احتمال قرمز بودن هر مهره $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$ است . بنابراین احتمال قرمز بودن دو مهره $\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ است .

ب) **روش اول :**

$$P(\text{مهره اول آبی و دومی غیر آبی})=\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۳۶}$$

$$P(\text{مهره اول غیرآبی و دومی آبی})=\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۸}{۳۶}$$

$$P(\text{مهره اول آبی و دومی نیز آبی})=\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۴}{۳۶}$$

بنابراین احتمال اینکه حداقل یکی آبی باشد برابر است با $\frac{۵}{۹}=\frac{۴}{۳۶}+\frac{۸}{۳۶}+\frac{۸}{۳۶}$ است .

روش دوم : احتمال اینکه هیچکدام آبی نباشد $\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۶}\times\frac{۴}{۶}$ متمم حداقل یک مهره آبی بودن ، است .

بنابراین احتمال حداقل یک مهره آبی بودن برابر است با : $۱-\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$

پ) مهره ها هر دو قرمز یا هر دو آبی اند . احتمال هر دو قرمز باشند $\frac{۹}{۳۶}=\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}$ و احتمال هر دو آبی باشند $\frac{۴}{۳۶}=\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۶}$ است در نتیجه احتمال هر دو مهره همرنگ باشند برابر است با : $\frac{۱۳}{۳۶}=\frac{۴}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}$.

۱۰- الف) $P(\text{لامپ اول معیوب باشد})\times P(\text{لامپ دوم معیوب باشد})\times P(\text{لامپ سوم معیوب باشد})=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۲۲۰}$

ب) $P(\text{حداقل یک لامپ معیوب باشد})=۱-P(\text{تمام لامپ ها سالم باشند})=۱-\frac{۹}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۳۴}{۵۵}$

****

۱۱- احتمال عدم موفقیت دارو روی هر شخص $۱-۰/۹=۰/۱$ است .

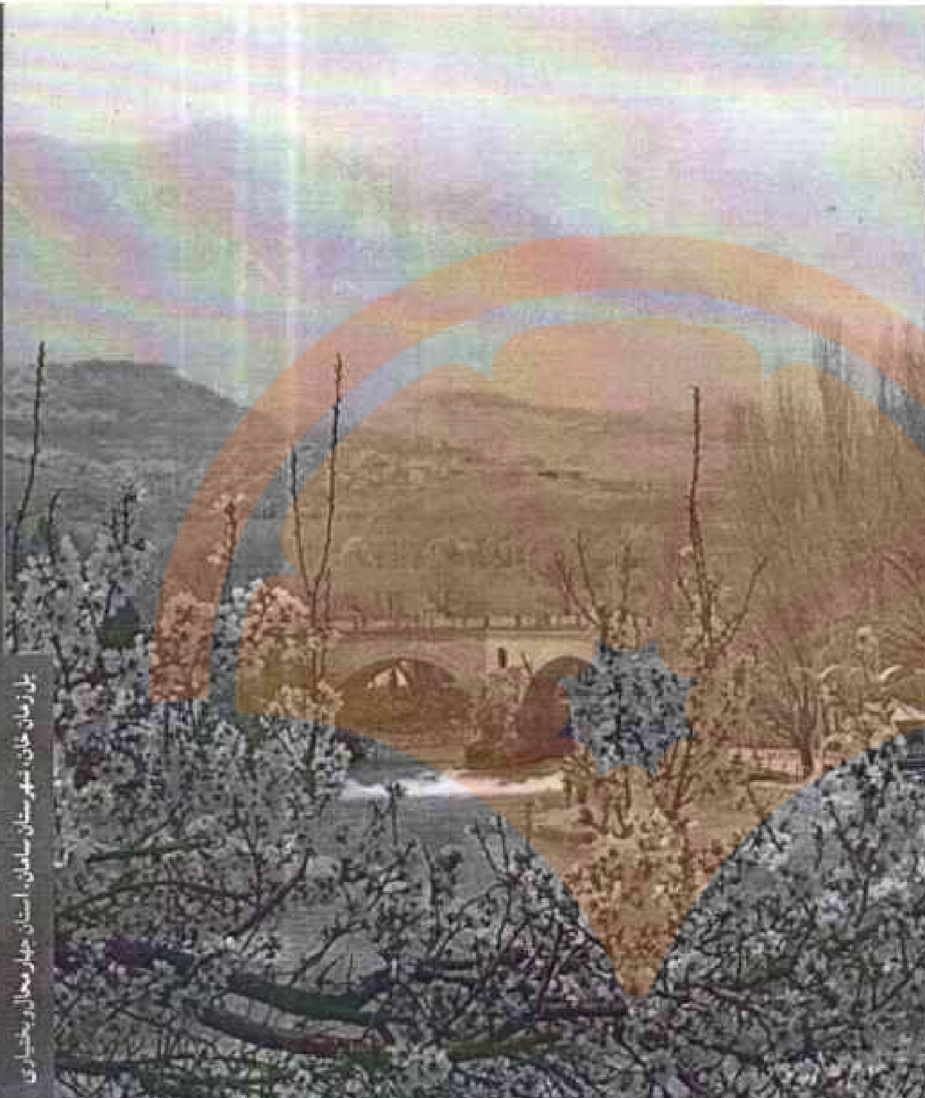
با توجه به مستقل بودن افراد از یکدیگر ، احتمال اینکه روی همه ی افراد جواب منفی داشته باشد برابر است با :

$$۰/۱\times۰/۱\times۰/۱\times\cdots\times۰/۱=(۰/۱)^{۱۰}$$

۱۲- $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۴=P(A)-۰/۱\Rightarrow P(A)=۰/۵$

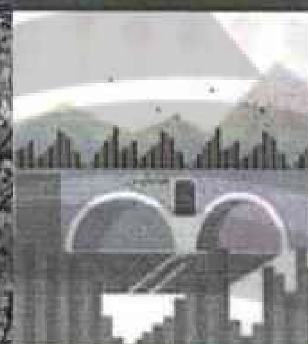
$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow ۰/۱=۰/۵\times P(B)\Rightarrow P(B)=۰/۲$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=۰/۵+(۱-۰/۲)-۰/۴=۰/۹$$



پل زمان خان، شهرستان سامان، استان چهارمحال و بختیاری

آمار هنر پرورش و پردازش داده است. نمایش داده‌ها می‌تواند شبیه یک کوه و یا شبیه شاخه‌های درختان باشد. می‌توان برای ساختن یک پل از معیارهای گرایش به مرکز و یا معیارهای پراکندگی استفاده نمود.



۳ آمار توصیفی

- ۱ توصیف و نمایش داده‌ها
- ۲ معیارهای گرایش به مرکز
- ۳ معیارهای پراکندگی

تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

درس ۱ توصیف و نمایش داده‌ها

بعد از گردآوری داده‌ها، به تنظیم، رده‌بندی و خلاصه کردن آنها می‌پردازیم. به این منظور می‌توان از روش‌های زیر استفاده نمود:

الف) تنظیم و طبقه‌بندی داده‌ها در یک جدول به نام جدول فراوانی

ب) رسم کردن نمودارهای مختلف براساس مقادیر جدول فراوانی

فعالیت

یک راننده تاکسی در یک روز، اسکناس‌های زیر را از مسافران دریافت می‌کند. او تصمیم دارد این اسکناس‌ها را در کیف خود دسته‌بندی کند. برای انجام این دسته‌بندی، می‌خواهد مراحل زیر را انجام دهد. شما او را کمک کنید تا این کار را انجام دهد.

۱ ابتدا به هر نوع اسکناس عدد ۱ تا ۴ را بدهید و در ستون شماره وارد کنید.

۲ سپس به شمارش اسکناس‌ها بپردازید و تعداد تکرار هر اسکناس را در ستون سوم وارد کنید.

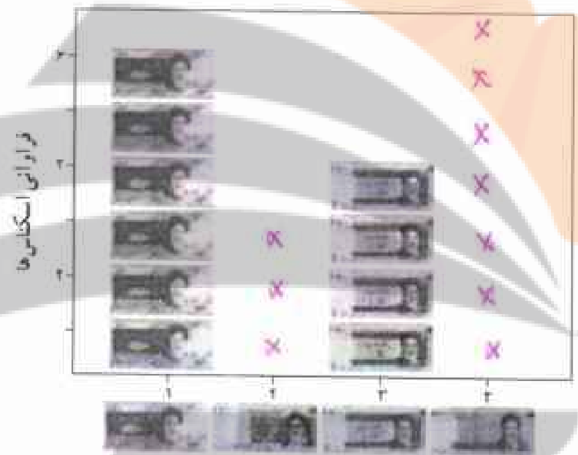
۳ در ادامه تعداد هر اسکناس را بر تعداد کل اسکناس‌ها تقسیم کنید و آن را در ستون چهارم قرار دهید.

۴ با توجه به اعداد موجود در جدول زیر، چند درصد اسکناس‌ها ۱۰ هزار تومانی، چند درصد ۱۰۰۰ تومانی، چند درصد ۵ هزار تومانی و چند درصد از اسکناس‌ها ۱۰ هزار تومانی است؟

انواع اسکناس‌ها	شماره	فراوانی یا تعداد تکرار هر اسکناس	فراوانی یا تعداد تکرار هر اسکناس / تعداد کل اسکناس‌ها
	۱	۶	$\frac{۶}{۲۰}$ = ۰/۳۰
	۲	۳	۰/۱۵
	۳	۴	۰/۲۰
	۴	۷	۰/۳۵
تعداد کل اسکناس‌ها		۲۰	۱

حال می‌خواهیم جدول بالا را به صورت سه نمودار الف، ب و پ نشان دهیم.

۱ در نمودار الف، ابتدا دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهندهٔ تعداد تکرار اسکناس‌ها، یا فراوانی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهندهٔ نوع اسکناس‌ها باشند. در این نمودار، اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار تومانی روی هم قرار گرفته‌اند. شما هم اسکناس‌های ۲ هزار تومانی را به صورت [۲] و اسکناس‌های ۱۰ هزار تومانی را به صورت [۱۰] در نمودار قرارداده و آن را کامل کنید.



نمودار الف

۲ در نمودار ب، نیز دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان دهندهٔ نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کلّ اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی اسکناس‌ها و محورافقی نشان دهندهٔ نوع اسکناس‌ها است. با رسم مستطیل‌هایی برای فراوانی نسبی اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار تومانی نمودار شکل ب را کامل کنید.

نمودار ب

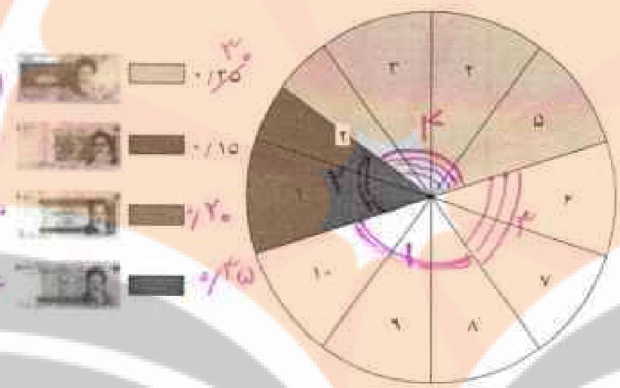
تهیه کننده :

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

۳ اگر راننده تاکسی بخواهد وضعیت تعداد اسکناس‌های خود را در یک هفته پیش‌بینی کند، کدام نمودار الف یا ب می‌تواند به او کمک کند؟ هردو می‌توانند کمک کنند ولی نمودار «ب» مناسب‌تر است.

۴ برای رسم نمودار دایره‌ای ابتدا دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشان دهندهٔ ۱۰ درصد کلّ دایره است. سپس با استفاده از عدد مربوط به نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی مربوط به اسکناس ۱۰ هزار تومانی در ستون چهارم، قسمت اوّل دایره و نصف قسمت دوم دایره رنگ قرمز شده است که معادل ۱۵درصد کل دایره است و به طور مشابه برای اسکناس ۲ هزار تومانی سه قسمت دایره به‌علاوه نصف قسمت دوم رنگ زرد می‌شود که معادل ۳۵ درصد کلّ دایره است. برای اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار تومانی دایره را رنگ آبی و سبز کنید.



نمودار ب

داده‌ها : واقعیت‌هایی دربارهٔ یک شیء یا فردند که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند.

متغیر : هر ویژگی از اشیا یا اشخاص، که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را متغیر می‌گویند و عددی که به آن ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود را مقدار متغیر، یا مشاهده می‌گویند.

فراوانی یک داده : تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می‌شود را فراوانی آن داده می‌گویند.

فراوانی نسبی یک داده : با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کلّ داده‌ها، فراوانی نسبی آن داده به‌دست می‌آید. اگر فراوانی نسبی داده‌ها در ۱۰۰ ضرب شود، آن‌گاه درصد داده‌ها به‌دست می‌آید.

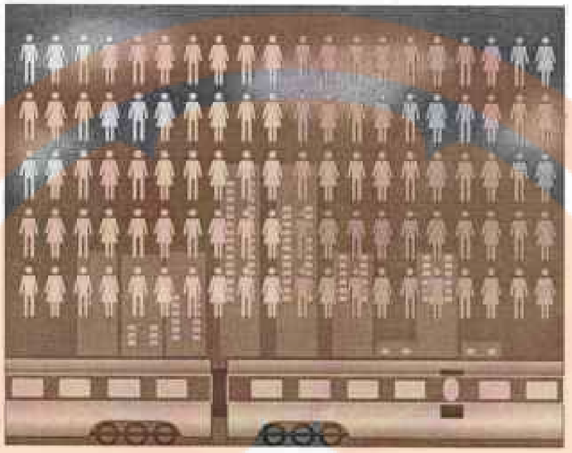
کار در کلاس

در مورد اینکه مسافران یک قطار در طول سفر چگونه از وقت خود استفاده می‌کنند، تحقیقی صورت گرفته است و نتایج زیر به دست آمده است.

در شکل ت، تعداد مسافران یک قطار به عنوان متغیر گسسته را ملاحظه می‌کنید.

- افرادی که با رنگ زرد مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار استراحت می‌کنند. ۵۰ نفر
- افرادی که با رنگ نارنجی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار با تلفن همراه خود بازی می‌کنند. ۲۵ نفر
- افرادی که با رنگ سبز مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار مطالعه می‌کنند. ۱۵ نفر

■ افرادی که با رنگ آبی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار غذا می‌خورند. ۱۰ نفر



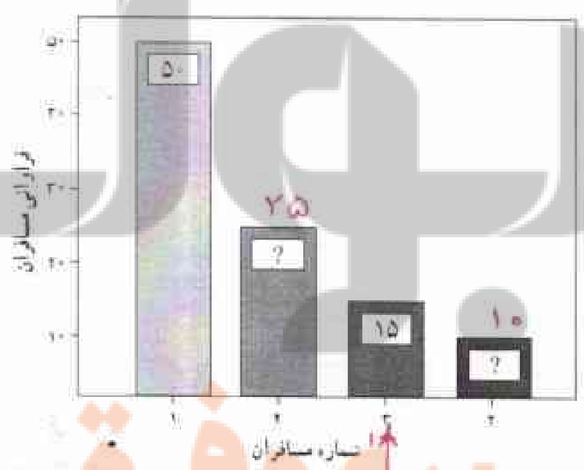
شکل ت

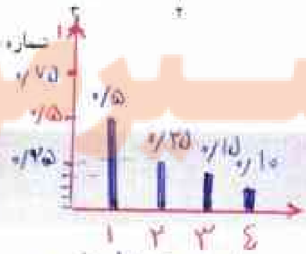
جدول فراوانی مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

مسافران قطار	شماره مسافران	فراوانی مسافران	فراوانی نسبی مسافران
مسافرانی که استراحت می‌کنند	۱	۵۰	$\frac{۵۰}{۱۰۰}$ = ۰/۵۰
مسافرانی که با تلفن همراه خود بازی می‌کنند	۲	۲۵	۰/۲۵
مسافرانی که مطالعه می‌کنند	۳	۱۵	۰/۱۵
مسافرانی که غذا می‌خورند	۴	۱۰	۰/۱۰
تعداد کلّ مسافران	—	۱۰۰	۱

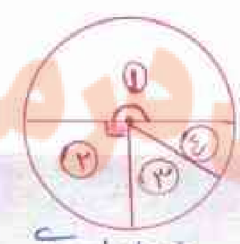
همچنین نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

فراوانی نسبی تعداد مسافران را براساس جدول کامل شده رسم کنید. نمودار دایره‌ای مربوط به فراوانی نسبی تعداد مسافران را رسم کنید.





نمودار فراوانی نسبی
(میله‌ای)



نمودار دایره‌ای

فعالیت

سال‌هاست با مسئلهٔ آلودگی هوا آشنا هستیم و این مسئله به یکی از دغدغه‌های مهم تبدیل شده است.

شاخص کیفیت هوا[1] (AQI)، متغیری پیوسته برای بیان کیفیت روزانه هواست. شاخص کیفیت هوا، برای شش آلایندهٔ اصلی هوا شامل مونواکسید کربن، ازن، دی‌اکسید گوگرد، دی‌اکسیدنیتروژن و میزان ذرات معلّق درهوا سنجیده می‌شود.

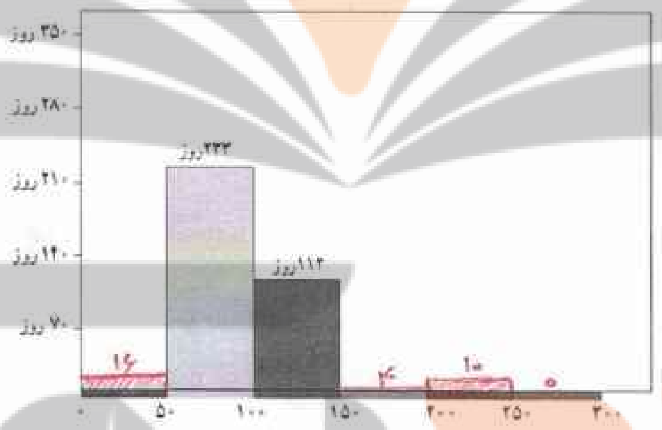
	آلاینده	تأثیر بهداشتی	منبع انتشار
O_3	ازن	کاهش عملکرد ریه و افزایش علائم تنفسی مانند سرفه، تنگی نفس، تشدید آسم و سایر بیماری‌های ریوی، افزایش استفاده از دارو، مراجعات و پذیرش بیمارستانی، اورژانس و مرگ‌ومیر زودرس	این آلایندهٔ ثانویه در اثر واکنش شیمیایی ترکیبات آلی فرّار و اکسیدهای نیتروژن در حضور نور خورشید تولید می‌شود.
$PM_{2.5}$ PM_{10}	ذرات معلّق	مواجههٔ کوتاه مدت با این آلاینده می‌تواند منجر به تشدید علائم بیماری‌های قلبی ریوی و علائم تنفسی، افزایش نیاز به استفاده از دارو و پذیرش بیمارستانی گردد. مواجههٔ طولانی مدت عامل مرگ‌ومیر زودرس و تشدید بیماری‌های قلبی و ریوی است.	ذرات معلّق در اثر انتشار مستقیم و یا واکنش‌های شیمیایی ایجاد می‌شوند. عمده‌ترین منابع انتشار این آلاینده شامل احتراق سوخت (مانند سوزاندن زغال‌سنگ، چوب و سوخت دیزل)، فرایندهای صنعتی، کشاورزی و انتشار از جاده، خودروها (اگزوز، لنت، لاستیک و ...) می‌باشند.
NO_2	دی‌اکسید نیتروژن	تشدید بیماری‌های ریوی، افزایش مراجعات و پذیرش بیمارستانی، اورژانس و افزایش آسیب‌پذیری و استعداد ابتلا به عفونت‌های ریوی	احتراق سوخت (از وسایل نقلیه، واحدهای تولید برق، صنایع، بویلرها و همچنین سوزاندن چوب)
CO	مونواکسید کربن	کاهش اکسیژن‌رسانی به بافت‌ها و اندام‌های مختلف بدن، تشدید بیماری‌های قلبی و درد قفسه سینه، افزایش مراجعات و پذیرش بیمارستانی	احتراق سوخت (به خصوص در وسایل نقلیه موتوری)
SO_2	دی‌اکسید گوگرد	تشدید آسم و افزایش علائم تنفسی، کمک به شکل‌گیری و تشدید علائم و اثرات بیماری‌های ریوی	احتراق سوخت (به‌ویژه سوخت‌های با گوگرد بالا)، فرایندهای تولید برق و صنایع، منابع طبیعی مانند آتشفشان

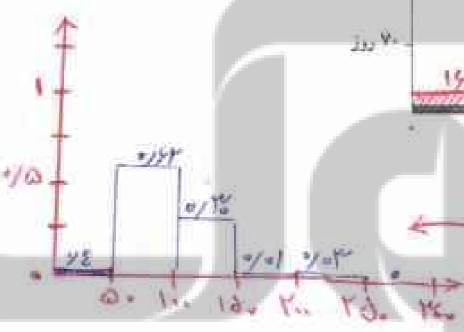
[1]- Air Quality Index

اطلاعات تکمیلی و داده‌های مربوط به شاخص آلودگی هوا در سایت شرکت کنترل کیفیت هوا[1] قابل دسترسی است.
میزان شاخص کیفیت هوا در شهر تهران برای تمام روزهای سال ۱۳۹۳ در جدول زیر گزارش شده است. این جدول را کامل کنید:

وضعیت هوا	شاخص کیفیت هوا	فراوانی	فراوانی نسبی
پاک	$۰ \le AQI \le ۵۰$	۱۶	$\frac{۱۶}{۳۶۵} =$ ۰/۰۴
سالم	$۵۰ < AQI \le ۱۰۰$	۲۳۳	۰/۶۲
ناسالم برای گروه‌های حساس	$۱۰۰ < AQI \le ۱۵۰$	۱۱۲	۰/۳۰
ناسالم	$۱۵۰ < AQI \le ۲۰۰$	۴	۰/۰۱
بسیار ناسالم	$۲۰۰ < AQI \le ۲۵۰$	۱۰	۰/۰۳
خطرناک	$۲۵۰ < AQI \le ۳۰۰$	۰	۰
تعداد کلّ روزهای یک سال	—	۳۶۵	۱

نمودار مربوط به فراوانی تعداد روزها براساس وضعیت آلودگی هوا را کامل کنید؟





■ نمودار فراوانی نسبی تعداد روزها را براساس وضعیت آلودگی هوا رسم کنید.
■ جند درصد از روزهای سال، هوا سالم بوده است؟ ۰/۶۲×۱۰۰=۶۲ درصد
■ جند درصد روزهای سال، هوا ناسالم و بسیار ناسالم بوده است؟
(۰/۰۱+۰/۰۳)×۱۰۰=۴ درصد
■ کدام نمودار، در پاسخ دادن به سؤالات، ما را بهتر راهنمایی می‌کند؟
نمودار فراوانی نسبی

۱ـ http://air.tehran.ir

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

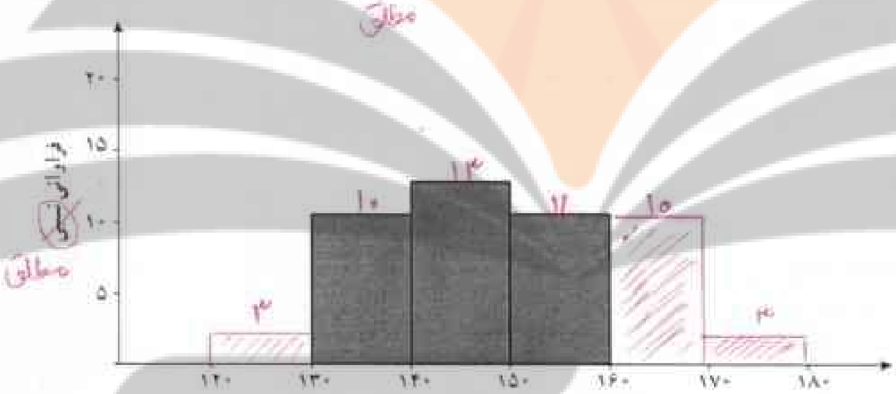
کار در کلاس

جدول فراوانی زیر مربوط به قد (H) ۵۰ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم است. جاهای خالی جدول زیر را کامل کنید.

قد دانش‌آموزان	فراوانی	فراوانی نسبی
۱۲۰ ≤ H < ۱۳۰	۳	۰/۰۶
۱۳۰ ≤ H < ۱۴۰	۱۰	۰/۲۰
۱۴۰ ≤ H < ۱۵۰	۱۳	۰/۲۶
۱۵۰ ≤ H < ۱۶۰	۱۱	۰/۲۲
۱۶۰ ≤ H < ۱۷۰	۱۰	۰/۲۰
۱۷۰ ≤ H < ۱۸۰	۳	۰/۰۶
مجموع	۵۰	۱

بر اساس اعداد جدول، نمودارهای بافت نگاشت[1] مربوط به فراوانی ~~نسبی~~ قد دانش‌آموزان را کامل کنید.

مطلق



قد چند درصد از دانش‌آموزان بین ۱۶۰ تا ۱۷۰ سانتی‌متر است؟ همچنین قد چند درصد از دانش‌آموزان بین ۱۲۰ تا ۱۴۰ سانتی‌متر است؟

۲۰ درصد

۰/۰۶ + ۰/۲۰

= ۰/۲۶

یعنی ۲۶ درصد

تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

۱ــ Histogram

تمرین

۱ داده‌های زیر، مسافتی را که ۲۰ راننده از مکان‌های مختلف برای رسیدن به مقصد A طی می‌کنند نشان می‌دهد. این داده‌ها، در جدول زیر گردآوری شده است. جدول را کامل کرده و نمودار بافت نگاشت مربوطه را رسم کنید.

کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است	فراوانی	فراوانی نسبی
از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر	۱	
از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر	۲	
از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر	۳	
از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر	۵	
از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر	۴	
از ۳۰/۵ کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر	۳	
از ۳۵/۵ کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر	۲	
مجموع	۲۰	

۲ رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است: ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودار را رسم کنید؟

نمودار میله‌ای ☐ نمودار دایره‌ای ☐ هر دو ☐

۳ جملات زیر را کامل کنید:

الف) برای متغیّرهای پیوسته از نمودار............... استفاده می‌شود.

ب) برای متغیّرهای گسسته از نمودارهای .... و .... استفاده می‌شود.

پ) برای متغیّرهای کیفی از نمودارهای .... و .... استفاده می‌شود.

۴ گروه خونی ۵۰ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به صورت زیر گردآوری شده‌اند:

الف) جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد را رسم کنید. ب) نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی و همچنین نمودار دایره‌ای مربوط به این افراد را رسم کنید؟ پ) چند درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند؟

O	O	A	A	O
B	O	B	A	O
AB	B	A	B	AB
O	O	A	A	O
AB	O	A	B	A
O	A	A	O	A
O	A	O	AB	A
O	B	A	A	O
O	O	O	A	O
O	A	O	A	O

۵ اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O، ۰/۲ باشد و مجموع فراوانی‌های همهٔ گروه‌های خونی برابر ۲۰ در نظر گرفته شود. فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟

۶ نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهدکودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار، به سؤالات زیر پاسخ دهید؟

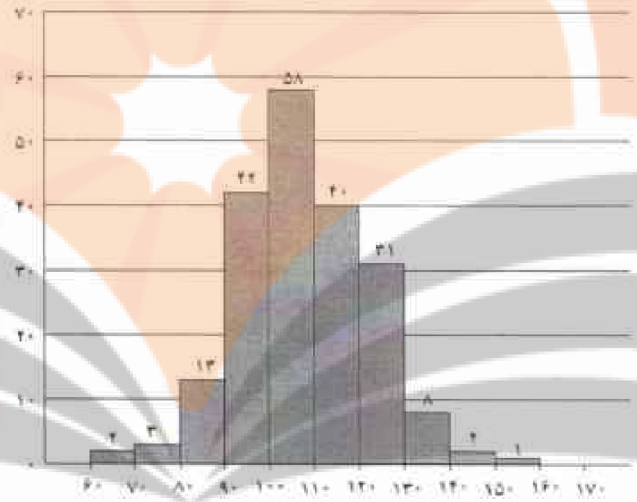
الف) تعداد کلّ کودکان که نمرهٔ IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

ب) نمرهٔ IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

پ) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ هستند؟

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید؟

حل شده



۷ جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف بیت شعر زیر را به‌دست آورید؟

کیست این پنهان مرا در جان و تن   کز زبان من همی گوید سخن[1]

تهیه کننده :

گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

۱ــ این بیت شعر از کتاب گنجینة الاسرار عمان سامانی است.

حل تمرین های صفحه ی ۸۱ (آمار و احتمال)

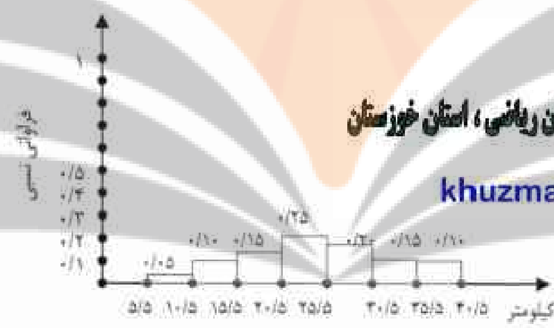
تمرین ۱ :

کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است	فراوانی	فراوانی نسبی
از ۵/۵ کلیومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر	۱	۰/۰۵
از ۱۰/۵ کلیومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر	۲	۰/۱۰
از ۱۵/۵ کلیومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر	۳	۰/۱۵
از ۲۰/۵ کلیومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر	۵	۰/۲۵
از ۲۵/۵ کلیومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر	۴	۰/۲۰
از ۳۰/۵ کلیومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر	۳	۰/۱۵
از ۳۵/۵ کلیومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر	۲	۰/۱۰
مجموع	۲۰	۱

تهیه کننده :

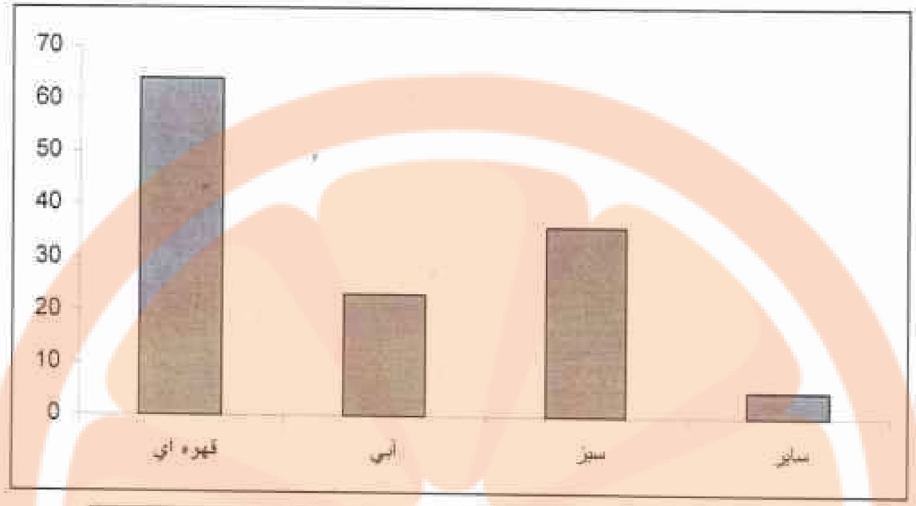
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان

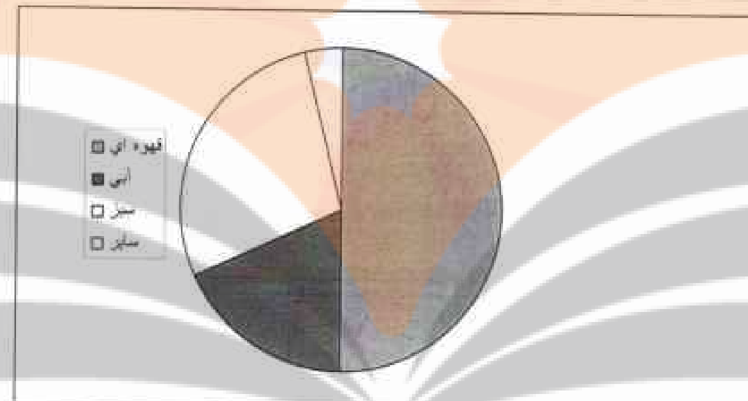
khuzmath1394@chmail.ir



تمرین ۲ : از هر دو نمودار می توان استفاده کرد. البته بهتر است که فراوانی نسبی را در ۳۶۰ درجه ضرب نمود، که واحدها تبدیل به درجه شوند و به کمک نقاله نمودار دایره ای دقیق تری رسم نمود.

رنگ	فراوانی	زاویه (بر حسب درجه)
قهوه ای	۶۴	$A=\frac{۶۴}{۱۲۸}\times ۳۶۰=۱۸۰$
آبی	۲۳	$B=\frac{۲۳}{۱۲۸}\times ۳۶۰=۶۴/۷$
سبز	۳۶	$C=\frac{۳۶}{۱۲۸}\times ۳۶۰=۱۰۱/۲$
سایر	۵	$D=\frac{۵}{۱۲۸}\times ۳۶۰=۱۴/۱$
جمع	۱۲۸	۳۶۰





تمرین ۳ : الف) بافت نگار   ب) دایره ای و میله ای   پ) دایره ای و میله ای

تمرین ۴ :

گروه خونی	فراوانی	فراوانی نسبی
A	۱۸	۰/۳۶
B	۶	۰/۱۲
O	۲۲	۰/۴۴
AB	۴	۰/۰۸
جمع	۵۰	۱

رسم نمودارها ی فراوانی و فراوانی نسبی ساده است . برای نمودار دایره ای اگر زاویه ی را بر حسب درجه محاسبه کنیم، نمودار دقیق تری می توان رسم نمود.

تمرین ۵ :

$$f_O = ۰/۴ \rightarrow \frac{F_O}{۲۰} = ۰/۴۰ \rightarrow F_O = ۸$$

تمرین ۶ : الف)

$$۲+۳+۱۳+۴۲+۵۸+۴۰+۳۱+۸+۲+۱ = ۲۰۰$$

ب) بیشترین نمره‌ی IQ بین ۱۰۰ تا ۱۱۰ و کمترین نمره ی IQ بین ۱۵۰ تا ۱۶۰ می باشد.

پ) درصد $\frac{۲+۱}{۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۱/۵$

ت) جدول فراوانی

حدود نمره‌ی IQ	فراوانی
۶۰ – ۷۰	۲
۷۰ – ۸۰	۳
۸۰ – ۹۰	۱۳
۹۰ – ۱۰۰	۴۲
۱۰۰ – ۱۱۰	۵۸
۱۱۰ – ۱۲۰	۴۰
۱۲۰ – ۱۳۰	۳۱
۱۳۰ – ۱۴۰	۸
۱۴۰ – ۱۵۰	۲
۱۵۰ – ۱۶۰	۱
جمع	۲۰۰

تمرین ۷ :

حرف	فراوانی	فراوانی نسبی
ک	۲	۰/۰۵
ی	۴	۰/۱۰
س	۲	۰/۰۵
ت	۲	۰/۰۵
آ	۵	۰/۱۲
ن	۸	۰/۲۰
پ	۱	۰/۰۲
هـ	۲	۰/۰۵
م	۳	۰/۰۷
ر	۲	۰/۰۵
د	۲	۰/۰۵
ج	۱	۰/۰۲
و	۲	۰/۰۵
ز	۲	۰/۰۵
ب	۱	۰/۰۲
گ	۱	۰/۰۲
خ	۱	۰/۰۲
جمع	۴۱	۱

نمودار میله ای و دایره ای می توانند، نمودار های مناسبی باشند.

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

تاریخچهٔ علم آمار و علم احتمال

علم آمار تاریخچه‌ای بسیار طولانی دارد؛ منشأ ظهور آمار به‌صورت توصیف اطلاعات را می‌توان سرشماری‌هایی که حدود ۴۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح توسط بابلی‌ها و مصری‌ها و بعداً توسط امپراتوری‌های روم و ایران دربارهٔ اطلاعات مربوط به زاد و ولد و دارائی‌های افراد جامعهٔ زیر سلطهٔ خود انجام می‌گرفته، به حساب آورد.

در قرن ۱۴ میلادی برای محاسبه نرخ بیمه، جمع‌آوری اطلاعات دربارهٔ تولد و وفات و حوادث رایج شد.

در اواسط قرن ۱۷ مطالعات آماری به‌صورت توصیفی انجام می‌گرفت. مثلاً **گرونت** با مطالعهٔ تعداد متولدین کشف نمود که تعداد پسرها کمی از تعداد دخترها بیشتر است، اما سال‌های اول زندگی تعداد بیشتری از پسرها فوت می‌کنند.

استفاده از علم احتمال در آمار، در اواخر قرن ۱۷ شروع شد. در این مورد می‌توان به مطالعات **مندل** در مورد قانون وراثت اشاره کرد.

دامنهٔ علم آمار در اوایل قرن ۱۹ شامل جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها می‌شد. **لژاندر** در ۱۸۰۵ «روش کمترین مربعات» را برای اولین بار شرح داد.

آمار مدرن در اواخر قرن ۱۹ و اوایل قرن ۲۰ پدید آمده است. **گالتون** و **کارل پیرسون** آمار را وارد چارچوب دقیق ریاضیات کردند و فیشر در ابداع روش‌های مختلف «استنباط آماری» از جمله «آزمون فرض» قدم‌های مهمی برداشت.

علم احتمال عمری کوتاه‌تر از علم آمار دارد:

در اواسط قرن ۱۶ اولین کتاب احتمال توسط **کاردانو** با عنوان «بازی‌های شانس» نوشته شد.

در اواسط قرن ۱۷ **پاسکال** و **فرما** اولین کسانی بودند که مطالعهٔ احتمال را به‌طور علمی شروع نمودند. البته آنها کتابی در این مورد ننوشتند بلکه در مکاتبات خود به آنالیز ترکیبی و مسائل مربوط به علم احتمال پرداختند. **هویگنس** کتابی در مورد احتمال نوشت که از نظر تحلیل علمی در سطح بسیار بالاتری از کتاب **کاردانو** قرار داشت.

یاکوب برنولی و **دموآور** در قرن ۱۸ کار را ادامه دادند. در قرن ۱۸ و ابتدای قرن ۱۹ علم احتمال در دانش‌های طبیعی و صنعت به‌طور جدی کاربرد پیدا کرد. در این دوره نخستین قضیه‌های علم احتمال یعنی قضایای **لاپلاس**، **پواسون**، **لژاندر** و **گاوس** ثابت شد.

در نیمهٔ دوم قرن ۱۹ دانشمندان روسی تأثیر زیادی در پیشرفت علم احتمال داشتند؛ **چبیشف** و شاگردانش، مسئله‌های **لیاپونوف** و **مارکوف**، از مسئله‌های کلی علم احتمال را حل کردند و قضایای **برنولی** و **لاپلاس** را تعمیم دادند.

در آغاز قرن ۲۰ متخصصان کارهای قبلی را منظم نموده و ساختمان اصول موضوعه احتمال را بنا نمودند. در این دوره دانشمندان زیادی روی علم احتمال کار کردند اما درخشان‌ترین نام در این عرصه **کولموگروف** روسی است که اصول موضوع احتمال را در کتابی به نام مبانی علم احتمال در آلمان منتشر کرد.

با توجه به اینکه شکل‌گیری علم احتمال در اروپای قرن شانزدهم برای بررسی بازی‌های شانسی بوده است، بسیاری از مسائل احتمال هنوز هم به زبان بازی و شرط‌بندی بیان می‌شود، در حالی‌که امروزه علم احتمال در بسیاری از مسائل مهندسی، پزشکی، اقتصادی، سیاسی، علوم انسانی و... مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

درس ۲ معیارهای گرایش به مرکز

الف) میانگین داده‌ها

فعالیت

در یک باغ، برای تعیین میزان محصولات گردو، چهار نوع درخت گردو وجود دارد که میزان محصولات انواع گردوها برحسب تعداد به شرح زیر است :

نوع گردو	گردوی نوع اول	گردوی نوع دوم	گردوی نوع سوم	گردوی نوع چهارم
میزان محصول گردو (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰۰	۱۰۰۰

$\bar{x} = \frac{5000 + 2500 + 35000 + 1000}{4} = 10875$

الف) میانگین تعداد گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت چه تعداد است؟

حال اگر علاوه‌بر داشتن اطلاعات میزان تولید گردو برای هر نوع درخت گردو، تعداد درخت‌های باغ مطابق جدول زیر مشخص شده باشند :

نوع	گردوی نوع اول	گردوی نوع دوم	گردوی نوع سوم	گردوی نوع چهارم
میزان محصول گردو برای هر درخت (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰۰	۱۰۰۰
تعداد درخت‌ها	۱۰	۵	۷	۳

ب) آیا می‌توان میانگین تعداد گردوی تولید شده در قسمت (الف) را در این حالت به عنوان میانگین گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت گردو در نظر گرفت؟ خیر

۵۰۰۰۰ ۱۲۵۰۰ ۲۴۵۰۰ ۳۰۰۰

$$\bar{x}=\frac{(10\times 5000)+(5\times 2500)+(7\times 35000)+(3\times 1000)}{10+5+7+3}=\frac{310500}{25}=12420$$

پ) میانگین گردوی تولید شده در این حالت، به چه صورت است؟

مجموع داده‌ها: اگر n دادهٔ x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ، داشته باشیم، مجموع آن داده‌ها را با نماد سیگما ($\sum$) نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

و عبارت $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ، سیگمای x_i از ۱ تا n، می‌خوانیم.

میانگین یا متوسط داده‌ها: میانگین یا متوسط داده‌ها را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

میانگین موزون داده‌ها: اگر n، دادهٔ x_1، x_2، ... ، x_n داشته باشیم به طوری که هر یک از این داده‌ها دارای تعداد تکرار w_1، w_2، ... ، w_n هستند که به هر یک از آنها وزن دادهٔ متناظر با آن می‌گوییم. میانگین موزون داده‌ها را با نماد $\bar{x}_w$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}_w=\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

کار در کلاس

دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجهٔ کارنامهٔ آزمون آن به شرح زیر است:

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۷۱	۶۵	۸۰	۵۲	۹۵	۱۰۰
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

$$\bar{x} = \frac{71+65+80+52+95+100}{6} = \frac{463}{6} = 77{,}17$$

الف) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش‌آموز بدون احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟

ب) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش‌آموز با احتساب ضرایب مواد امتحانی را کامل کنید؟

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{6} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{6} w_i} = \frac{4\times 71 + 3\times 65 + 1\times 80 + 1\times 52 + 4\times 95 + 3\times 100}{4+3+1+1+4+3} = \frac{284+195+80+52+380+300}{16}$$

پ) کدام متوسط، مناسب است؟

$$= \frac{1291}{16} = 80{,}69$$

ب) میانه داده‌ها

فعالیت

در شکل الف افرادی را به ترتیب قد، در یک صف مرتب کرده‌اند و داده‌های مربوط به اندازهٔ قد آنها (برحسب سانتی‌متر)، به صورت روبه‌رو می‌باشند.

در شکل الف در بین پنج فرد، کدام فرد از نظر قد در وسط صف قرار گرفته است؟ A

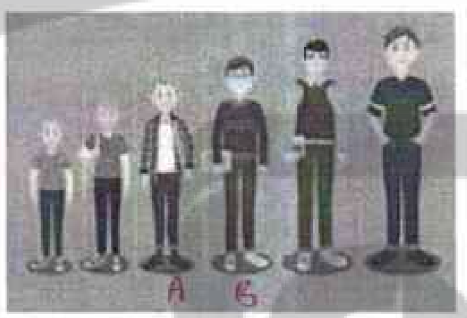
شکل الف

حال به شکل ب توجه کنید. در بین شش فرد، کدام فرد در وسط صف قرار دارد؟

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به راحتی نمی‌توانید عدد وسط در این حالت را پیدا کنید. برای به دست آوردن عدد وسط در این حالت مراحل زیر را انجام دهید:

الف) دو فردی که در جایگاه وسط صف قرار گرفته‌اند را پیدا کنید.

ب) میانگین این دو عدد را به عنوان عدد وسط قد این افراد به دست آورید.

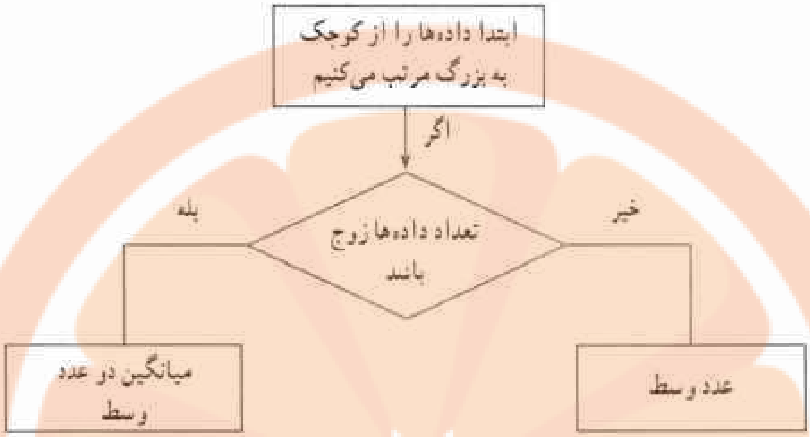


شکل ب

$\frac{A+B}{2}$

میانه، چارک اوّل و چارک سوم : عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها را که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند میانه داده‌ها می‌گوییم و آن را با Q_2 نشان می‌دهیم. میانهٔ یک چهارم اوّل داده‌های مرتب شده را چارک اوّل داده‌ها گوییم و آن را با Q_1 نشان می‌دهیم. همچنین میانهٔ سه چهارم داده‌های مرتب شده را چارک سوم گوییم و آن را با Q_3 نشان می‌دهیم.

نحوهٔ به دست آوردن میانه داده‌ها



کار در کلاس

در یک شعبهٔ بانک تراکنش‌های مالی بسیاری در یک روز انجام می‌گردد. یک تراکنش مالی ممکن است انتقال مبلغی از حساب پس‌انداز یک مشتری به حساب جاری مشتری دیگری در یک بانک باشد. این تراکنش را می‌توان به دو عملیات تقسیم کرد: بدهکار کردن حساب پس‌انداز یک مشتری به اندازهٔ مبلغ مورد نظر و طلبکار کردن حساب جاری مشتری دیگر به‌اندازهٔ همان مبلغ است.

الف) فرض کنید تراکنش‌های مالی در بازهٔ زمانی ۸ تا ۹ صبح یک شعبهٔ بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود.

Q_1 Q_3
۸٫۷ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۲ و ۲۵
Q_2

۱۰	۸/۷	۱۰	۱۲	۲۵

■ میانه، چارک اوّل و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

ب) حال فرض کنید تراکنش‌های مالی دیگری در بازهٔ زمانی ۹ تا ۱۰ صبح در همان شعبه بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود.

۷۰	۳۰	۸۱/۷	۲۰	۳۲	۳۴

■ در این حالت نیز میانه، چارک اوّل و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

۲۰ و ۳۰ و ۳۲ و ۳۴ و ۷۰ و ۸۱٫۷
$Q_1 = ۳۰$ $Q_3 = ۷۰$
$Q_2 = \frac{۳۲+۳۴}{۲} = ۳۳$

پ) مد یا نما داده‌ها

فعالیت

به تصاویر روبه‌رو توجه کنید. در شکل (الف)، (ب) و (پ) یک‌سری از حالت‌های صورتک را مشاهده می‌کنید. تعداد این حالت‌ها را در شکل (الف)، (ب) و (پ) در جدول زیر کامل کنید.

شماره صورتک‌ها	انواع صورتک‌ها	شکل الف	شکل ب	شکل پ
۱		۴	۲	۴
۲		۱	۲	۱
۳		۱	۲	۲
۴		۲	۲	۲
۵		۲	۲	۴
۶		۱	۲	۱

- در شکل الف کدام صورتک بیشتر از همه تکرار شده است؟ صورتک ۱
- در شکل ب کدام صورتک بیشتر از همه تکرار شده است؟ همه به تعداد مساوی تکرار شده‌اند.
- در شکل پ کدام صورتک بیشتر از همه تکرار شده است؟ صورتک‌های ۱ و ۵

مد یا نما داده‌ها: داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد، مد یا نما داده‌ها نام دارد. اگر در داده‌هایی، همهٔ داده‌ها یک فراوانی داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها مد ندارند. اگر در داده‌هایی، دو داده بیشترین فراوانی را داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها دو مد دارند.

کار در کلاس

در یک مسابقهٔ پرتاب دارت، سه نفر شرکت کرده‌اند. بر اساس ۱۰ پرتابی که آنها انجام داده‌اند، امتیازهای زیر به دست آمده است:

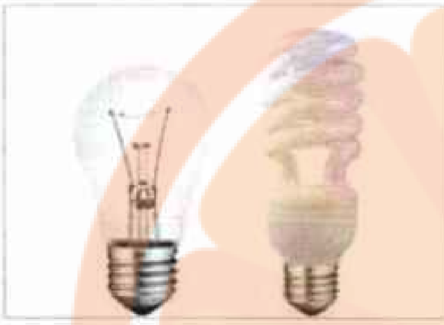
- مد نفر اول چه عددی است؟ ۹ و ۱۰
- مد نفر دوم چه عددی است؟ مد ندارد.
- مد نفر سوم چه عددی است؟ ۹

نفر اول	۱۰	۹	۱۰	۷	۵	۹	۱۰	۹	۸	۸
نفر دوم	۱۰	۹	۸	۶	۱	۲	۳	۵	۴	۷
نفر سوم	۹	۹	۹	۷	۱۰	۱۰	۹	۵	۴	۷

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

میانگین، میانه و مد داده‌ها، کدام معیار را انتخاب می‌کنید؟

کار در کلاس



دو کارخانهٔ تولید لامپ را در نظر بگیرید. کارخانهٔ (الف)، لامپ‌های کم مصرف و کارخانهٔ (ب)، لامپ‌های پر مصرف تولید می‌کند. مدیر این دو کارخانه می‌خواهد در مورد طول عمر لامپ‌های تولیدی کارخانه‌هایشان تحقیقی انجام دهد.

بر اساس داده‌های سال‌های گذشته در کارخانهٔ (الف) و (ب)، طول عمر پنج لامپ برحسب ماه ثبت شده است و نتایج را به صورت زیر جمع‌آوری می‌نماید.

لامپ انتخاب شده	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانهٔ (الف)	۱۷	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانهٔ (ب)	۰	۱۵	۰	۱۶	۱۳

■ آیا میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانهٔ (الف)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده کارخانهٔ (الف) است؟

■ به دلیل وجود لامپ‌های تولید شده با طول عمر صفر در کارخانهٔ (ب) آیا بازهم میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانهٔ (ب)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده است؟ چه معیار گرایش به مرکزی مناسب است؟ بلی میانه

■ مدیر کارخانه براساس فروش سال گذشته، متوجه شده است که لامپ‌های کم‌مصرف با نور سفید در منازل مردم رایج شده است. اگر او بخواهد برای امسال لامپ‌های کم‌مصرف با نور سفید تولید کند، کدام معیار گرایش به مرکز، برای تعداد این لامپ‌های تولیدی به او کمک می‌کند؟ مُد

دادهٔ دورافتاده: مشاهده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با سایر مشاهدات مجموعه داده‌ها داشته باشد. میانگین داده‌ها را تحت تأثیر قرار داده در حالی که تأثیری بر میانه و مد داده‌ها ندارد. در فعالیت مربوط به تعداد لامپ‌های تولیدی کارخانهٔ (ب)، عدد صفر دادهٔ دورافتاده است.

در تفسیر و تحلیل مسائل آماری، در نظر گرفتن تنها یک شاخص گرایش به مرکز کافی نیست. می‌بایست هر سه معیار میانگین، میانه و مد محاسبه شود و بر اساس هدف مورد بررسی، معیار مناسب انتخاب و از آن برای انجام تفسیر، قضاوت و پیش‌بینی مورد استفاده قرار گیرد.

تمرین

۱ تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقهٔ گذشته به صورت ۴۳، ۴۲، ۴۵، ۴۴، ۴۵، ۴۸ است.
میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید؟

۲ بالاترین دما در هریک از روزهای هفته گذشته اندازه‌گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است. معدل یا میانگین دما در هفتهٔ گذشته چه عددی است؟

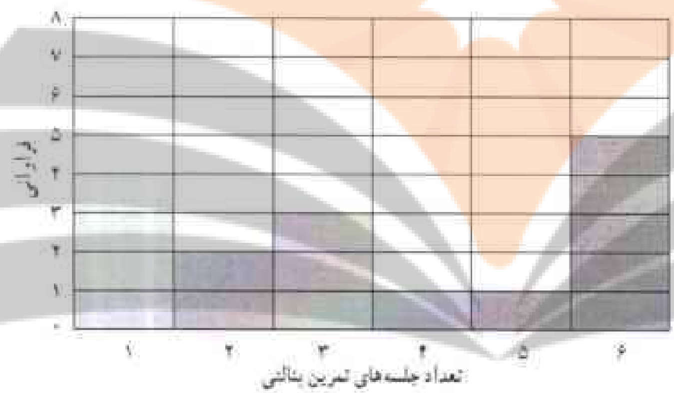
۲۹، ۳۱، ۲۸، ۳۲، ۲۹، ۲۷، ۵۵

۳ میانه و مد هر یک از داده‌های زیر را به دست آورید؟

الف) ۹، ۹، ۹، ۹، ۸ ب) ۳۰، ۲۴، ۴۰، ۵۰، ۶۰ پ) ۱۰، ۳، ۸، ۱۵

ت) ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۵ ث) ۲۳، ۱۲، ۱۲، ۲۳ ج) ۷، ۱۳، ۴، ۷

۴ نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسهٔ تمرین پنالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید؟



۵ در جدول زیر، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش‌آموز گردآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سؤال چه اعدادی‌اند؟

نمرات درس ریاضی					
	۲۰	۱۶	۱۷	۱۹	۱۷/۵
	۱۸	؟	۱۸	۱۵	۱۶

میانگین نمرات = ۱۵/۶۵

مد نمرات = ؟

۶ داده‌های زیر مدت زمان مطالعهٔ یک دانش‌آموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
مدت زمان مطالعه (ساعت)	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۳	۳

این دانش‌آموز به طور میانگین چند ساعت در روز، در هفتهٔ گذشته مطالعه کرده است؟

۷ یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی که میانه و مد آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر ۴۲/۲ میلیون ریال و عدد ۹۰ میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا اینکه این شرکت ضرر نکند؟

۸ دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجهٔ کارنامه آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۵۳	!	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

سؤال ایراد دارد، برای رفع ایراد معدل موزون را به ۶۳ تبدیل کنید.

اگر معدل موزون درصد این دانش‌آموز ~~۷۳~~ ۶۳ باشد، درس فیزیک را چند درصد زده است؟

۹ میانگین ۵ دادهٔ آماری ۱۷ است. اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟

۱۰ دو دانش‌آموز، جدول‌های چهارخانه‌ای را به صورت روبه‌رو رنگ‌آمیزی کرده‌اند، بر اساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو شکل به صورت روبه‌رو نشان داده شده است :

$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۴۷۰ \\ ۵۸۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۸۰ \\ ۶۹۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$

حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم. جدول عددی حاصل را به دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به جدول طیف رنگ‌ها، به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل بالا است؟

برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.

رنگ‌ها	طیف رنگ‌ها
	۴۵۰ تا ۴۹۵
	۴۹۵ تا ۵۷۰
	۵۷۰ تا ۵۹۰
	۵۷۰ تا ۶۲۰
	۶۲۰ تا ۷۵۰

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

حل تمرین های صفحه‌ی ۹۰ (آمار و احتمال)

تمرین ۱ :

$$\bar{x} = \frac{۴۸ + ۴۵ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۲ + ۴۳}{۶} = \frac{۲۶۷}{۶} = ۴۴/۵$$

تمرین ۲ :

$$\bar{x} = \frac{۵۵ + ۲۷ + ۲۹ + ۳۲ + ۲۸ + ۳۱ + ۲۹}{۷} = \frac{۲۳۱}{۷} = ۳۳$$

تمرین ۳ : برای محاسبه‌ی میانه، ابتدا داده را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

الف) مد برابر ۹ و میانه برابر ۹   ب) مد ندارد. میانه برابر ۵۰   پ) مد ندارد. میانه برابر ۹

ت) مد ندارد. میانه برابر ۶   ث) مد ندارد. میانه برابر ۱۷/۵   ج) مد برابر ۷ و میانه برابر ۷

تمرین ۴ : داده ها را تعداد ضربات پنالتی را در هر جلسه در نظر گرفتیم.

شماره جلسه	تعداد ضربات پنالتی گل شده
۱	۴
۲	۲
۳	۳
۴	۱
۵	۱
۶	۵
جمع	۱۶

میانگین $\bar{x} = \frac{۱۶}{۶} = ۲/۷$

۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ $\rightarrow$ میانه $\tilde{x} = Q_۲ = \frac{۲ + ۳}{۲} = ۲/۵$

مد $\hat{x} = ۱$

تمرین ۵ :

$$\bar{x} = ۱۵/۶۵ \rightarrow \frac{۱۷/۵ + ۱۹ + ۱۷ + ۱۶ + ۲۰ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۸ + a + ۱۸}{۱۰} = ۱۵/۶۵$$

$$\rightarrow \frac{a + ۱۵۶/۵}{۱۰} = ۱۵/۶۵ \rightarrow a + ۱۵۶/۵ = ۱۵۶/۵ \rightarrow a =$$

مد نمرات $\hat{x} = ۱۸$, ۱۶

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۶ :

$$\bar{x} = \frac{۲ + ۱/۵ + ۲/۵ + ۱/۵ + ۲ + ۳ + ۳}{۷} = \frac{۱۵/۵}{۷} = ۲/۲۱$$

تمرین ۷ : برای اینکه شرکت بیمه کننده ، ضرر نکند، میانگین مناسب است. ولی برای شخص بیمه شده ، شاید میانه مناسب تر باشد.

تمرین ۸ : گیریم که درصد فیزیک برابر k باشد. در این صورت: (اگر میانگین موزون به ۶۳ تبدیل شود.)

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \rightarrow \frac{(۴)(۵۳) + (۳)(k) + (۱)(۶۷) + (۱)(۳۴) + (۴)(۸۰) + (۳)(۶۷)}{۴ + ۳ + ۱ + ۱ + ۴ + ۳} = ۶۳$$

$$\rightarrow \frac{۲۱۲ + ۳k + ۶۷ + ۳۴ + ۳۲۰ + ۲۰۱}{۱۶} = ۶۳ \rightarrow ۸۳۴ + ۳k = ۱۰۰۸$$

$$\rightarrow ۳k = ۱۷۴ \rightarrow k = ۵۸$$

تمرین ۹ :

$n = ۵$ تعداد داده های قبلی

$\sum x_i = n\bar{x} = ۵ \times ۱۷ = ۸۵$ مجموع داده های آماری قبلی

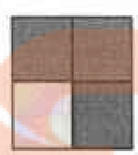
$m = n + ۲ = ۷$ تعداد داده های جدید

$\sum y_i = ۸۵ + ۱۷ + ۱۱ = ۱۱۳$ مجموع جدید داده های آماری

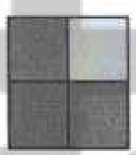
$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{m} = \frac{۱۱۳}{۷} = ۱۶/۱۴$ میانگین داده های جدید

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

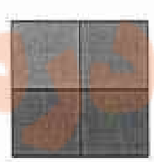
تمرین ۱۰ :



$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۴۷۰ \\ ۵۸۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۸۰ \\ ۶۹۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$



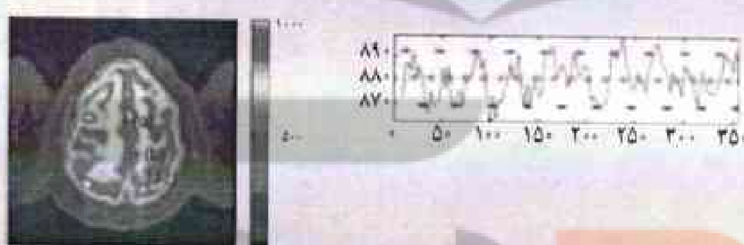
$$\begin{pmatrix} \frac{۴۷۰ + ۴۷۰}{۲} & \frac{۵۸۰ + ۴۷۰}{۲} \\ \frac{۶۹۰ + ۵۸۰}{۲} & \frac{۶۹۰ + ۶۹۰}{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۲۵ \\ ۶۳۵ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$

کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز

تفسیر تصاویر مغزی

در شکل زیر با میانگین تصویر مغزی ۱۰ فرد آشنا می‌شویم.

این تصویر از شکل زیر، برشی از یک تصویر مغزی است. رنگ قرمز نشان دهندهٔ ناحیه‌ای است که در آن فشار خون بالایی وجود دارد. این ناحیه که مشکوک به وجود تومور است با استفاده از علم آمار شناسایی و محلّ تومور حدس زده می‌شود. به عنوان مثال، نقطهٔ a به عنوان نقطه‌ای شناخته می‌شود که با احتمال بالایی محلّ قرارگرفتن تومور است، ولی نقاط b و c به‌رغم داشتن فشار خون بالا، محل تومور نیستند.



درس ۳ معیارهای پراکندگی

۱ـ انحراف معیار و واریانس داده‌ها

فعالیت

در اقتصاد هر کشوری شاخصی تحت عنوان نرخ تورم، نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کند. یکی از اقلام مصرفی مورد نیاز در محاسبهٔ نرخ تورم در یک کشور، قیمت گوشت قرمز است. در جدول روبه‌رو قیمت گوشت قرمز در سال ۱۳۹۵ در شهرستان‌های استان تهران گردآوری شده است.

شهرستان‌های استان تهران	قیمت گوشت قرمز (هزار تومان)
تهران	۴۲
اسلام شهر	۲۰
دماوند	۲۵
رباط کریم	۲۶
ری	۲۷
شمیرانات	۴۰
شهریار	۲۰
فیروزکوه	۱۶
قدس	۲۰
ملارد	۲۱
پیشوا	۲۲
پاکدشت	۲۳
ورامین	۲۶

■ میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران را به دست آوردید؟ $\bar{x} = ۲۵٫۲۳$

■ درنمودار زیر، میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران نشان داده شده است. قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران را با کشیدن نقطه روی نمودار مشخص کنید.

$\bar{x} = \frac{۳۲۸}{۱۳} = ۲۵٫۲۳$ میانگین قیمت گوشت

۵ نقطه ۸ نقطه هیچ کدام

۱ چند نقطهٔ بالای خط قرمز، چند نقطه پایین خط قرمز و چند نقطه روی خط قرمز قرار دارند؟

۲ منظور از پراکندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است. هر چقدر نقاط با همان قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران حول خطّ قرمز یا همان میانگین قیمت گوشت قرمز نزدیک‌تر باشند، نشان‌دهندهٔ چیست؟ هرچقدر دورتر باشند چطور؟ پراکندگی قیمت‌ها

۳ معیاری را برای اندازه‌گیری پراکندگی قیمت گوشت قرمز یا همان نقاط حول خط قرمز می‌توانید معرفی کنید؟
انحراف معیار

دیدیم پراکندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است. برای معرفی معیار مناسب یک راه حل ابتدایی این است که تک تک قیمت‌ها را از میانگینشان کم کنیم. این تفاضل‌ها را انحراف از میانگین می‌نامیم. مجموع انحراف از میانگین‌ها برابر با صفر خواهد شد و این به دلیل آن است که برخی از داده‌ها از میانگین بزرگ‌تر و برخی دیگر کوچک‌ترند در نتیجه مقادیر مثبت و منفی حاصل می‌شوند که مجموع آنها همدیگر را خنثی می‌کنند. برای رفع این مشکل، قدر مطلق انحراف از میانگین داده‌ها در نظر گرفته می‌شود. میانگین این مقادیر می‌تواند معیاری برای سنجش پراکندگی داده‌ها باشد، اما کار کردن با قدر مطلق کار آسانی نیست. از این رو، توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها در نظر گرفته می‌شود.

در آمار، یک معیار سنجش برای میزان پراکندگی داده‌ها حول میانگینشان، **انحراف معیار** است.

انحراف معیار به صورت زیر محاسبه می‌شود :

انحراف معیار داده‌ها : اگر n داده از جامعه به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، انحراف آنها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

که در آن $x_i-\bar{x}$، را انحراف دادهٔ iام از میانگین داده‌ها می‌گویند.

واریانس داده‌ها : توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها عدد کوچکی باشد، بدین معناست که پراکندگی داده‌ها حول میانگینشان کم و درنتیجه داده‌ها به هم نزدیک‌تر است و اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها عددی بزرگ باشد، بدین معناست که پراکندگی داده‌ها حول میانگینشان زیاد و درنتیجه داده‌ها از هم دورتر است.

مناسب است که ابتدا واریانس تعریف شود و سپس به کمک آن تعریف انحراف معیار گفته شود.

کار در کلاس

انحراف معیار و واریانس مربوط به داده‌های قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های تهران را می‌توانید با تکمیل جدول روبه‌رو محاسبه کنید.

$\bar{x} = ۲۵$ قرار می‌دهیم

$\sigma^۲ = \frac{۷۰۵}{۱۳} = ۵۴{,}۲۳$

$\sigma = \sqrt{۵۴{,}۲۳} = ۷{,}۳۶$

$\sum (x_i - \bar{x})^۲ = ۷۰۵$

قیمت گوشت قرمز	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۴۲	۴۲−۲۵=۱۷	۲۸۹
۲۰	۲۰−۲۵=−۵	۲۵
۲۵	۲۵−۲۵=۰	۰
۲۶	۲۶−۲۵=۱	۱
۲۷	۲۷−۲۵=۲	۴
۴۰	۴۰−۲۵=۱۵	۲۲۵
۲۰	۲۰−۲۵=−۵	۲۵
۱۶	۱۶−۲۵=−۹	۸۱
۲۰	۲۰−۲۵=−۵	۲۵
۲۱	۲۱−۲۵=−۴	۱۶
۲۲	۲۲−۲۵=−۳	۹
۲۳	۲۳−۲۵=−۲	۴
۲۶	۲۶−۲۵=۱	۱
	σ	۷٫۳۶
	σ^2	۵۴٫۲۳

خواندنی

نرخ تورّم

در علوم اقتصادی با استفاده از علم آمار، شاخصی تحت عنوان نرخ تورّم بیان می‌شود. نرخ تورّم، درصد تغییر سطح قیمت مجموعه کالاهای مصرفی مانند خوراک و پوشاک و کالاهای خدماتی مانند مسکن، آب و برق خانوارها در طول زمان را اندازه می‌گیرد.

فرض کنید متوسط قیمت مجموعه کالاهای مصرفی یک خانوار در سال a، P_1 و متوسط قیمت همان مجموعه کالای مصرفی در سال $a-1$، P_0 باشد. در این صورت نرخ تورّم در طی سال a به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{نرخ تورّم} = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \times ۱۰۰\%$$

به عنوان مثال، اگر متوسط قیمت گوشت قرمز به عنوان کالای مصرفی در سال $a-1$ و a به ترتیب، ۲۸ و ۳۲ هزار تومان برای هر کیلو باشد، در این صورت نرخ تورّم برای قیمت گوشت قرمز در سال a برابر:

$$\text{نرخ تورّم} = \frac{(۳۲-۲۸)}{۲۸} \times ۱۰۰ = ۱۴\%$$

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

یعنی متوسط قیمت گوشت قرمز در سال n ، ۱۴ درصد نسبت به سال گذشته افزایش یافته است.

لازم به ذکر است هر چقدر نرخ تورّم افزایش یابد، قدرت خرید مردم کاهش پیدا می‌کند. همچنین مرکز آمار ایران برای محاسبهٔ نرخ تورّم در یک سال، متوسط قیمت ۱۰۰ قلم کالای گروه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها و ۲۵۹ قلم کالای خدماتی برای سال جاری و سال قبل آن در نظر گرفته و این نرخ را محاسبه می‌کند.

۲ــ ضریب تغییرات داده‌ها

فعالیت

یکی از شاخص‌های کیفیت در لاستیک‌های تولید شده اتومبیل توسط یک کارخانه، طول عمر آن لاستیک‌هاست. هرچقدر متوسط طول عمر لاستیک‌های تولیدی بیشتر و انحراف معیار طول عمر لاستیک‌ها کمتر باشد، به این معناست که لاستیک‌ها کیفیت بالایی از نظر طول عمر دارند.

حال با توجه به مطالب گفته شده، به بررسی کیفیت لاستیک‌های تولیدی از نظر طول عمر دو کارخانهٔ (الف) و (ب) می‌پردازیم. براساس داده‌های به دست آمده میانگین طول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانه و انحراف معیار آنها به شرح جدول روبه‌رو است:

کارخانه	میانگین	انحراف معیار
کارخانهٔ الف	۵۴۰۰۰ کیلومتر	۵۰ کیلومتر
کارخانهٔ ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر

■ شما ترجیح می‌دهید از کدام کارخانه لاستیک بخرید؟

■ آیا می‌توان براساس میانگین و انحراف معیار و نمونه‌های در نظر گرفته شده قضاوت کرد؟ به نظر کارخانهٔ الف مناسب تر است.

برای پاسخ به سؤالات فوق نیاز به معرفی معیار جدیدی برای سنجش پراکندگی داده وجود دارد. این معیار را ضریب تغییرات داده‌ها می‌نامند.

ضریب تغییرات داده‌ها: معیاری است که از تقسیم انحراف معیار داده‌ها (σ) به میانگین داده‌ها ($\bar{x}$) به دست می‌آید و آن را با نماد CV نشان می‌دهند.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

هر قدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر خواهد شد که این موضوع برای ما مطلوب است.

کار در کلاس

الف) با کامل کردن جدول زیر، ضریب تغییرات مربوط به طول عمر دو کارخانه را محاسبه کنید.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانهٔ الف	۵۴۰۰۰ کیلومتر	۵۰ کیلومتر	0/0009
کارخانهٔ ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	0/0015

محصولات کدام کارخانه را انتخاب می کنید؟ «الف»

ب) حال با تغییر واحد اندازه‌گیری در جدول قبلی میانگین و انحراف معیار طول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانهٔ (الف) و (ب) به صورت زیر گزارش داده شده است.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانهٔ الف	۵۴۰۰۰۰۰۰ متر	۵۰۰۰۰ متر	0/0009
کارخانهٔ ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	0/0015

همان‌طور که ملاحظه می کنید میانگین و انحراف معیار لاستیک‌ها برای کارخانهٔ (الف) برحسب واحد اندازه‌گیری متر و برای کارخانهٔ (ب) برحسب کیلومتر است. در این حالت نیز ضریب تغییرات را در جدول زیر محاسبه کنید. آیا ضریب تغییرات به واحد اندازه‌گیری وابسته است؟ خیر، بستگی ندارد.

نمودار جعبه‌ای

در ابتدای این درس با معیارهای پراکندگی آشنا شدیم، حال می‌خواهیم با استفاده از نمودارهای آماری، معیارهای پراکندگی داده‌ها را به صورت تصویری نشان دهیم.

فعالیت

میزان بارش برف سالانه در دو پیست اسکی «الف» و «ب» برای هفت سال اندازه‌گیری و نتایج، در جدول زیر گردآوری شده است :

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸
میزان بارش برف در پیست اسکی الف	۸۲۵	۷۲۸	۴۷۲	۷۸۷	۳۳۵	۱۹۰	۵۵۱
میزان بارش برف در پیست اسکی ب	۵۶۶	۵۸۱	۹۳	۱۰۱۶	۵۲۵	۰	۲۷۱

عدد ۰ در جدول به این معناست که میزان بارش کمتر از ۱ سانتی‌متر است.

برای رسم نمودار آماری، مراحل زیر را انجام دهید.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

۱۹۰، ۳۳۵، ۴۷۲، ۵۵۱، ۷۲۸، ۷۸۷، ۸۲۵
Min Q_1 Q_2 Q_3 Max

سال	بیشترین مقدار میزان بارش برف Max	چارک سوم میزان بارش برف Q_3	میانه میزان بارش برف Q_2	چارک اول میزان بارش برف Q_1	کمترین مقدار میزان بارش برف Min
پیست اسکی الف	۸۲۵	۷۸۷	۵۵۱	۳۳۵	۱۹۰

ب) حال مقادیر جدول را روی یک محور نمایش می دهیم.

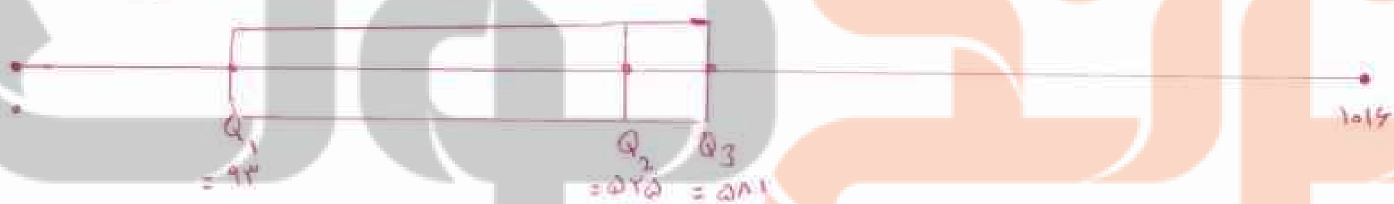
پ) برای مشخص کردن حدود دامنهٔ میان چارکی (IQR) یک جعبه به عرض دلخواه رسم می کنیم، سپس با استفاده از یک خط، میانه را در جعبه مشخص می کنیم و در انتها، از دو طرف جعبه به کمترین و بیشترین مقدار داده‌ها دو خط رسم می کنیم.

به این نمودار، نمودار جعبه‌ای می گوییم. در این نمودار چارک اول، میانه، چارک سوم، بیشترین و کمترین مقدار داده‌ها به‌طور هم‌زمان نشان داده می‌شود.

۰، ۹۳، ۲۷۱، ۵۲۵، ۵۶۲، ۵۸۱، ۱۰۱۶
Min Q_1 Q_2 Q_3 Max

کار در کلاس

- نمودار جعبه‌ای مربوط به پیست «ب» را رسم کنید. و سپس با نمودار جعبه‌ای پیست «الف» مقایسه کنید.
- اگر داده دورافتاده‌ای در داده‌ها باشند، نمودار جعبه‌ای چه تغییری می کند؟ کشیده تر می‌شود، میزان پراکندگی زیاد می‌شود



با مقایسه‌ی این نمودار با نمودار «الف» معلوم می‌شود که در نمودار «ب» پراکندگی داده‌ها زیاد است.

تمرین

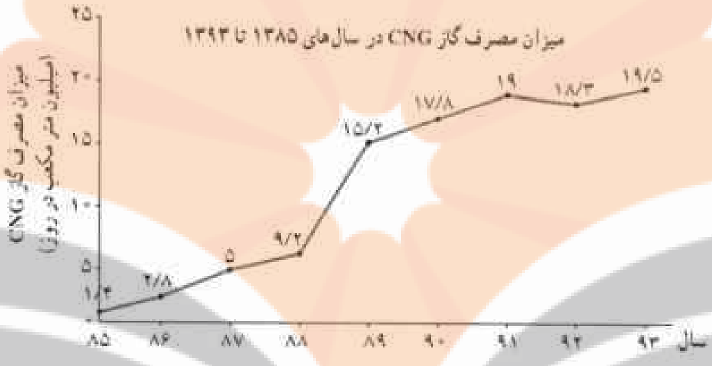
۱ فرض کنید سنّ افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند، به صورت زیر است:

۳۲،۵۹،۲۶،۵۳،۷۴،۱۷،۴۵،۲۳،۶۴،۵۰ ،۶۱

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سنّ افراد را به دست آورید.

۲ نمودار زیر میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید.

CNG
گاز طبیعی



۳ انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۱۰۰ ، ۱۲ ، ۸ ، ۱۶ ، ۱۰ ، ۴ ، ۷			
۳ ، ۲ ، ۱ ، ۰ ، ۰ ، -۳ ، -۲ ، -۱			
۱۰/۱۱ ، ۱۱/۳۶ ، ۱۰/۱۱ ۹/۸۸ ، ۹/۴۲ ، ۹/۷۶ ، ۹/۶۲			
۲ ، ۳۰۰۰ ، ۲۵۰۰ ، ۲۰۰۰			

۴ اعداد دلخواه را در جدول زیر بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات

۵ اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ باشد و میانگین ~~آن~~ آنها ۴، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

۶ اگر n داده را c برابر کنیم ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

۷ فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بوته را شمرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است :

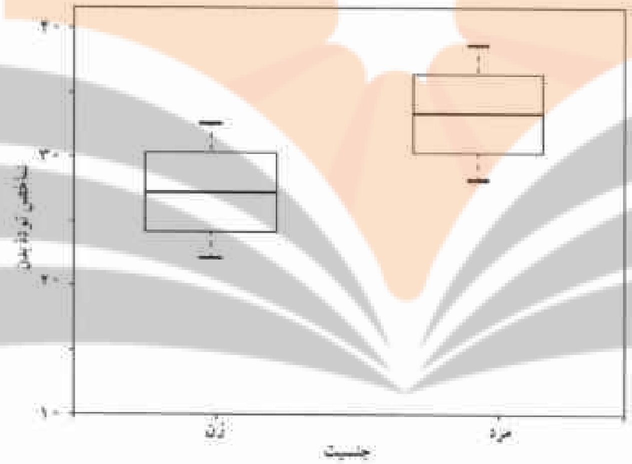
۲، ۱، ۵، ۵، ۲، ۲، ۲، ۲، ۳، ۱، ۱، ۱، ۲، ۴، ۷، ۱، ۴، ۶، ۸، ۳، ۴، ۷

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

۸ نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص تودهٔ بدن (BMI) به تفکیک جنسیت رسم شده است. این نمودار را تفسیر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) میانگین شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟

ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟



۹ داده‌های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ده سال گذشته است :

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	۱۱/۵	۱۱/۳	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۳/۵	۱۲/۳	۱۲/۴	۱۰/۴	۳۰/۱

نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.

حل تمرین های صفحه‌ی ۹۹ (آمار و احتمال)

۱ :

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^۲$
۳۲	−۱۴	۱۹۶
۵۹	۱۳	۱۶۹
۲۶	−۲۰	۴۰۰
۵۳	۷	۴۹
۷۴	۲۸	۷۸۴
۱۷	−۲۹	۸۴۱
۴۵	−۱	۱
۲۳	−۲۳	۵۲۹
۶۴	۱۸	۳۲۴
۵۰	۴	۱۶
۶۱	۱۵	۲۲۵
جمع = ۵۰۴	----	۳۵۳۴

میانگین $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{۵۰۴}{۱۱} = ۴۵/۸۱ \approx ۴۶$

واریانس $\sigma^۲ = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \dfrac{۳۵۳۴}{۱۱} = ۳۲۱/۲۷$

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{۳۲۱/۲۷} = ۱۸/۰۹$ ضریب تغییرات $CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{۱۸/۰۹}{۴۶} = ۰/۳۹$

۲ :

سال	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^۲$
۸۵	۱/۴	−۱۰/۶	۱۱۲/۳۶
۸۶	۲/۸	−۹/۲	۸۴/۶۴
۸۷	۵	−۷	۴۹
۸۸	۹/۲	−۲/۸	۷/۸۴
۸۹	۱۵/۲	۳/۲	۱۰/۲۴
۹۰	۱۷/۸	۵/۸	۳۳/۶۴
۹۱	۱۹	۷	۴۹
۹۲	۱۸/۳	۶/۳	۳۹/۶۹
۹۳	۱۹/۵	۷/۵	۵۶/۲۵
جمع	۱۰۸/۲	---	۴۴۲/۶۶

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

میانگین $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۱۰۸/۲}{۹} = ۱۲/۰۲ \approx ۱۲$

واریانس $\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{۴۴۲/۶۶۴}{۹} = ۴۹/۱۸$

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{۴۹/۱۸} = ۷/۰۱$ ضریب تغییرات $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۷/۰۱}{۱۲} = ۰/۵۸$

***

۳ :

اعداد	میانگین	واریانس	انحراف معیار	ضریب تغییرات
۷ و ۴ و ۱۰ و ۱۶ و ۸ و ۱۲ و ۱۰۰	۲۲/۴۲	۱۰۱۵/۳۹	۳۱/۸۶	۱/۴۲
۱- و ۲- و ۳- و ۰ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳	۰	۳/۵۰	۱/۸۷	نامعین
۱۰/۱۱ و ۱۱/۳۶ و ۱۰/۱۱ و ۹/۶۲ و ۹/۷۶ و ۹/۴۲ و ۹/۸۸	۱۰/۰۴	۰/۳۵	۰/۵۹	۰/۰۶
۲۰۰۰ و ۲۵۰۰ و ۳۰۰۰ و ۲	۱۸۷۵/۵	۱۲۹۵۰۰۰/۷۵	۱۱۳۷/۹۸	۰/۶۱

***

۴ :

اعداد	میانگین	واریانس	انحراف معیار	ضریب تغییرات
۷ و ۷ و ۷ و ۷ و ۷	۷	۰	۰	۰
۳ و ۷ و ۳ و ۷ و ۳	۴/۶	۳/۸۴	۱/۹۵	۰/۴۲
۱۳ و ۱۰ و ۷ و ۴ و ۱	۷	۱۸	۴/۲۴	۰/۶۰
۳ و ۲ و ۰ و ۲- و ۳-	۰	۵/۲۰	۲/۲۸	نامعین

***

۵ : (ذکر تعداد داده ها ، لازم نیست.)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \to ۲ = \frac{\sigma}{۴} \to \sigma = ۸ \to \sigma^۲ = ۶۴$$

۶ :

$y_۱ = cx_۱$ و $y_۲ = cx_۲$ و $y_۳ = cx_۳$ و .... و $y_n = cx_n$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{\sum cx_i}{n} = \frac{\sum cx_i}{n} = \frac{c\sum x_i}{n} = c\bar{x}$$

۱۰۰، ۲

$$\sigma_y^۲ = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^۲}{n} = \frac{\sum (cx_i - c\bar{x})^۲}{n} = \frac{\sum c^۲ (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{c^۲ \sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = c^۲ \sigma_x^۲$$

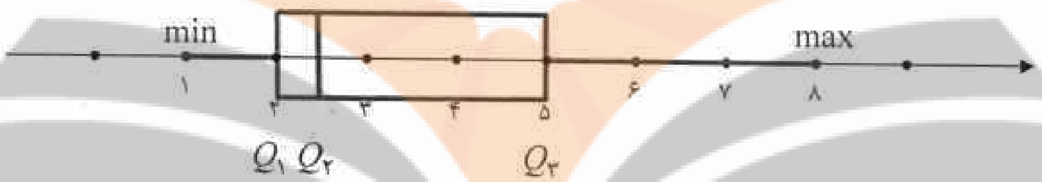
$$\rightarrow \sigma_y = |c| \sigma_x$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{|c| \sigma_x}{c\bar{x}} = \pm \sigma_x$$

:۷

$\boxed{۸ و ۷ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۴ و ۴ و ۴ و ۳ و ۳ و ۳}$ و $\boxed{۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱}$

$\min = ۱$ و $Q_۱ = ۲$ و $Q_۲ = \frac{۲+۳}{۲} = ۲/۵$ و $Q_۳ = ۵$ و $\max = ۸$



:۸

الف) با توجه به نمودار ، میانگین شاخص توده‌ی بدنی در آقایان بیشتر است.

ب) به نظر می رسد، پراکندگی یکسان است.

:۹

$\boxed{۳۰/۱ و ۱۳/۵ و ۱۳/۳ و ۱۲/۲ و ۱۱/۹}$ و $\boxed{۱۱/۵ و ۱۱/۳ و ۱۰/۵ و ۱۰/۴ و ۱۰/۳}$

$\min = ۱۰/۲$ و $Q_۱ = ۱۰/۵$ و $Q_۲ = \frac{۱۱/۵ + ۱۱/۹}{۲} = ۱۱/۷$ و $Q_۳ = ۱۳/۳$ و $\max = ۳۰/۱$

تهیه کننده :

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

۱۰۰/۳

خواندنی

نرخ بیکاری

امروزه بیکاری یکی از موضوعات مهم در جوامع بشری است که دولتمردان و سیاست‌گذاران تمامی کشورهای جهان به دنبال راهکارهایی برای از بین بردن این مسئله در کشورشان و فراهم کردن زمینه‌ای برای به‌کارگیری استعدادهای مردم کشورشان هستند. در علوم اقتصادی با استفاده از علم آمار، شاخصی تحت عنوان نرخ بیکاری بیان می‌شود. نرخ بیکاری، به صورت زیر تعریف می‌شود.

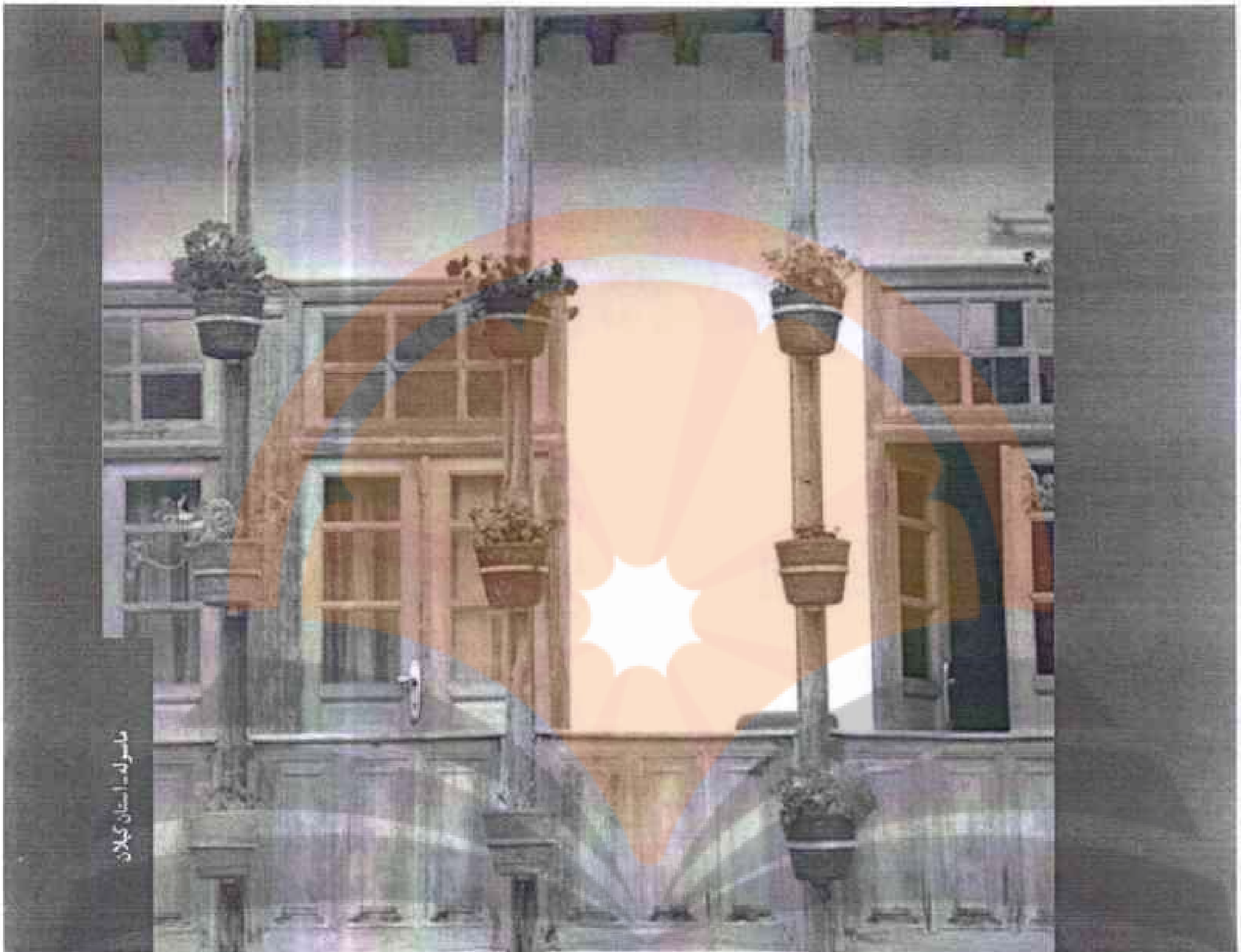
$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{کل جمعیت فعال}}$$

جمعیت بیکار به افراد ۱۰ ساله و یا بالاتر از ۱۰ ساله‌ای گفته می‌شود که سه شرط زیر را توأماً داشته باشند :

- در هفتهٔ مشخص حتی یک ساعت هم کار نکرده باشند.
- آمادگی برای انجام کار داشته باشند.
- در هفتهٔ مشخص و سه هفتهٔ قبل از آن جویای کار باشند. (اقدامات مشخصی را به منظور جست‌وجوی اشتغال، مزدبگیری و یا خوداشتغالی به عمل آورده باشند.)

جمعیت شاغل : به افراد ۱۰ ساله، یا بالاتر از ۱۰ ساله‌ای که در طول هفتهٔ مشخص (بازهٔ زمانی ۷ روزه‌ای که وضع فعالیت افراد در این بازهٔ زمانی مدنظر باشد) حداقل یک ساعت کار کرده باشند شاغل گویند.

جمعیت فعال : به مجموع جمعیت بیکار و شاغل گفته می‌شود.



ماسوله - استان گیلان