

تلاشی در مسیر موفقیت



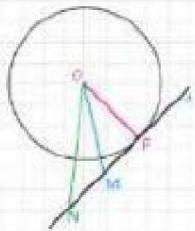
- دانلود گام به گام تمام دروس 
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه 
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی 
- دانلود نمونه سوالات امتحانی 
- مشاوره کنکور 
- فیلم های انگیزشی 

 Www.ToranjBook.Net

 [@ToranjBook_Net](https://ToranjBook_Net)

 [@ToranjBook_Net](https://ToranjBook_Net)

نکات صفحه‌ی ۱۱



۱- فرض کنیم خط a بر دایره‌ی C در نقطه‌ی F مماس است.

الف) نزدیک ترین نقطه‌ی خط a به نقطه‌ی O کدام است؟ چرا؟

نزدیک ترین نقطه‌ی خط a به نقطه‌ی O نقطه‌ی F است. می‌دانیم طول $OF = R$ و هر نقطه‌ی دیگر از خط a خارج دایره است و با توجه به قسمت (پ) مطالب فوق فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.

ب) از O به a عمود کنید. این خط عمود، خط a را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟

در نقطه‌ی F قطع می‌کند. اگر فرض کنیم که در F قطع نکند پس نقطه‌ی دیگری مانند M وجود دارد که OM بر خط a عمود است. و M پای عمود است. نقطه‌ی دیگری مانند N روی خط a هست که M بین N و F قرار دارد و

در نتیجه: $FM = MN$

$$\begin{cases} FM = MN \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \Rightarrow \widehat{OMN} \cong \widehat{OMF} \Rightarrow ON = OF = R \\ OM = OM \end{cases}$$

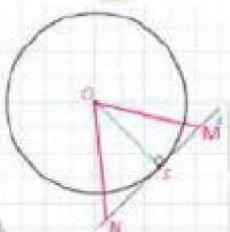
بنابراین نقطه‌ی N نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط a بر دایره تناقض دارد. پس خط مماس در نقطه‌ی F بر OF عمود است.

پ) نتیجه: اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه‌ی F برهم عمودند.

ت) با توجه به قسمت (ب) اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خط مماس بر دایره در نقطه‌ی F را رسم کنید؟

با توجه به مطلب فوق کافی است خطی را که در نقطه‌ی F بر OF عمود می‌شود رسم کنیم. این خط مماس بر دایره می‌باشد.

۲- خط a در نقطه‌ی F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همهٔ نقاط خط a نسبت به دایره‌ی C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطه‌ی تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.



فرض کنیم M نقطه‌ی دیگری غیر از F روی خط a باشد چون $OM > OF$ در نتیجه نقطه‌ی M برون دایره C است. بنابراین خط a با دایره‌ی C فقط یک نقطه مشترک دارد. در نتیجه خط a بر دایره مماس است.

بنابراین:

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

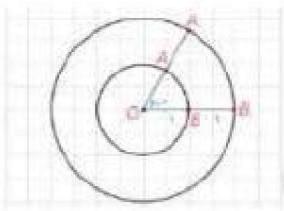
تلashی در مسیر موفقیت

کار در کلاس صفحه‌ی ۱۲

۱- با توجه به اینکه محيط دایره یک کمان به اندازه 360° است، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{دایره محيط}} = \frac{AB}{360^\circ}$$

۲- با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.



$$\widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\widehat{A_1B_1} = 60^\circ$$

$$\text{طول } \widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$$

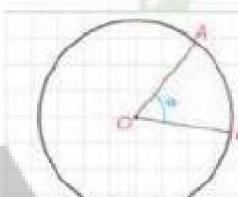
$$\text{طول } \widehat{A_1B_1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{\pi^2 \times 1} \Rightarrow \text{طول } \widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول } \widehat{A_1B_1}}{\pi^2 \times 2} \Rightarrow \text{طول } \widehat{A_1B_1} = \frac{\pi}{3}$$

۳- ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه‌ی مرکزی قطاعی از دایره‌ی $C(O, R)$ بر حسب درجه مساوی « باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با:

$$L = \frac{\pi R}{180^\circ} \alpha$$



طول کمان قطاع یک درجه $\frac{1}{360^\circ}$ محيط دایره است یعنی $\frac{\pi R}{360^\circ}$. در نتیجه طول کمان نظیر

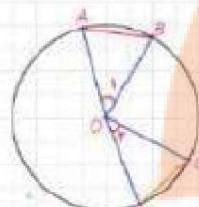
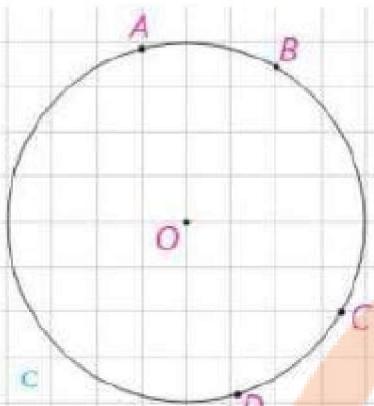
قطاع α درجه $= \frac{\pi R}{180^\circ} \alpha$ است. مساحت قطاع یک درجه $\frac{1}{360^\circ}$ مساحت دایره است یعنی $\frac{\pi R^2}{360^\circ}$.

در نتیجه مساحت قطاع α درجه $= \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha$ است.

تلاشی در مسیر موفقیت

فعالیت صفحه‌ی ۱۳

- ۱- فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایره‌ی $C(O,r)$ باهم برابرند.
با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز با هم برابرند.



$$\left\{ \begin{array}{l} AB = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{array} \right. \xrightarrow{\text{منطق}} OAB \cong OCD \xrightarrow{\text{اجرای نظری}} AB = CD$$

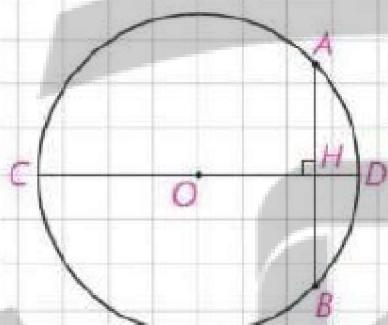
فرض: $AB = CD$; حکم: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

فرض: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$; حکم: $AB = CD$

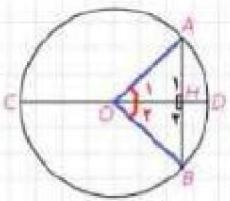
- ۲- فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = CD \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{array} \right. \xrightarrow{\text{منطق}} OAB \cong OCD \xrightarrow{\text{اجرای نظری}} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

- ۳- وتر AB و قطری از دایره که بر وتر AB عمود است مانند شکل مقابل داده شده‌اند. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.



تلاشی در مسیر موفقیت



فرض: $AH = BH$ و $\widehat{AD} = \widehat{BD}$: حکم: $CD \perp AB$

$$\begin{cases} OA = OB = R \\ \angle OAH = \angle OBH = 90^\circ \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow{\text{ضلع ضلع فانه}} OAH \cong OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} AH = BH \\ \angle \widehat{O_1} = \angle \widehat{O_2} \end{cases}$$

۴- این بار فرض کنید قطر CD و تر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می کند.

فرض: $CD \perp AB$ و $\widehat{AD} = \widehat{BD}$: حکم: $AH = BH$

$$\begin{cases} OA = OB = R \\ AH = BH \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow{\text{ضلع ضلع ضلع}} OAH \cong OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} \angle O_1 = \angle O_2 = 90^\circ \\ \angle \widehat{O_1} = \angle \widehat{O_2} \end{cases} \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD}$$

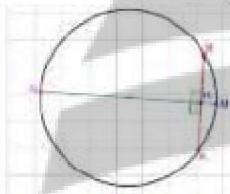
۵- حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می کند.

فرض: $CD \perp AB$ و $AH = BH$: حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$

$$\widehat{AD} = \widehat{BD} \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \begin{cases} OA = OB = R \\ \angle O_1 = \angle O_2 \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow{\text{ضلع ضلع}} OAH \cong OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} \angle O_1 = \angle O_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{cases}$$

نتیجه: عمود منصف و تر دایره از مرکز دایره می گذرد.

۶- اگر نقاط وسط و تر AB و کمان AB را داشته باشیم. چگونه میتوانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟



اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را بهم وصل کیم و از سمت H امتداد دهیم تا دایره را در نقطه N قطع کند. با توجه به ۴ و ۵ MN قطر عمود بر این وتر است.

لذت‌بخشی

تلاشی در مسیر موفقیت

فعالیت صفحه‌های ۱۳ و ۱۴

۱- در شکل مقابل \widehat{ADB} یک زاویهٔ محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

اگر از B به O وصل کنیم، زاویهٔ AOB یک زاویهٔ خارجی برای مثلث متساوی‌الساقین OB D است.

$$\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \widehat{ODB} = 2\widehat{ODB}$$

$$\widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

۲- در این شکل \widehat{ADB} یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

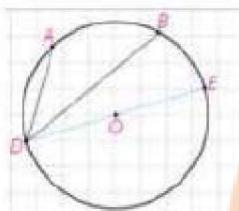
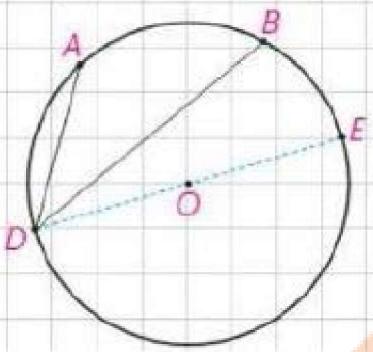
اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \widehat{FDB} = \frac{1}{2}\widehat{BE} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} + \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

نحوه:

تلاشی در مسیر موفقیت

۳- در این شکل \widehat{ADB} یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.



اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :

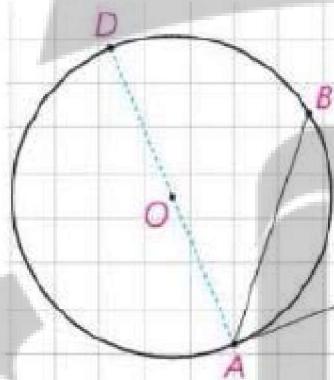
$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{1}{2} \widehat{AE} \\ \widehat{BDE} = \frac{1}{2} \widehat{BE} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AE} + \frac{1}{2} \widehat{BE} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

بنابراین:

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه.

فعالیت صفحه‌های ۱۴ و ۱۵

۱- زاویهٔ ظلی \widehat{CAB} را در نظر بگیرید و قطری از دایره را رسم کنید که شامل نقطهٔ A هست.



الف) $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{AD}$ و بنابراین: $\widehat{DAC} = 90^\circ$

ب) زاویهٔ \widehat{DAB} یک زاویهٔ محاطی است. بنابراین: $\widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DB}$

پ) از (الف) و (ب) داریم:

$$\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2} (\widehat{DA} - \widehat{DB})$$

و بنابراین:

تلاشی در مسیر موفقیت

$$\frac{1}{2} \widehat{BAC} = -\widehat{AB}$$

ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی متفرجه نیز برقرار است.

$$\text{الف) } \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{AD} \quad \text{و بنابراین: } \widehat{DAC} = 90^\circ$$

$$\text{ب) زاویه } \widehat{DAB} \text{ یک زاویه محاطی است. بنابراین: } \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DB}$$

پ) از (الف) و (ب) داریم:

$$\widehat{DAC} + \widehat{DAB} = \frac{1}{2} (\widehat{DA} + \widehat{DB})$$

$$\frac{1}{2} \widehat{BAC} = -\widehat{AB}$$

و بنابراین:

بنابراین:

قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبرو به آن زاویه.

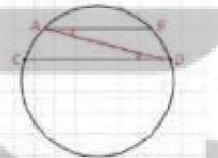
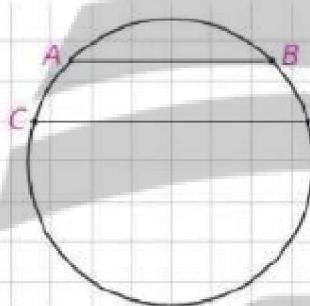
کار در کلاس صفحه ۱۵

۱- در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.

الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه اند؟

چرا؟

این دو زاویه بنابر قضیه خطوط موازی با هم برابر هستند.

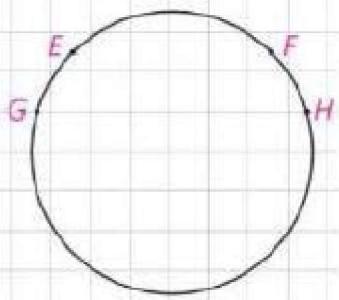


ب) کمان های \widehat{AC} و \widehat{BD} ، نسبت به هم چگونه اند؟

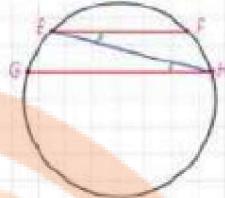
این دو کمان روبه رو به زوایای محاطی برابر هستند، پس با یکدیگر برابرند.

تلاشی در مسیر موفقیت

۲- در شکل مقابله کمان‌های EG و FH هم اندازه‌اند.



الف) و ترهاي EF و GH و پاره خط EH را رسم کنيد.



ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$$\widehat{EG} = \widehat{FH} \Rightarrow \frac{\widehat{EG}}{2} = \frac{\widehat{FH}}{2} \xrightarrow{\text{زاویه مساحتی}} \widehat{EHC} = \widehat{FEH}$$

پ) خطوط EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

باهم موازی هستند بنا بر عکس قضیه خطوط موازی

نتیجه: دو وتر از یک دایره موازی‌اند. اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشند.

فعالیت صفحه‌های ۱۵ و ۱۶

۱- فرض کنید رأس زاویه‌ی DAE مانند شکل مقابله بیرون دایره واقع شده باشد و کمان‌های DE و BC توسعه اضلاع زاویه‌ی مورد نظر مشخص شده باشند.

از نقطه‌ی C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$DAE = \widehat{FCB} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$$

$DAE = FCE$ و $AE \parallel CF$ بنا بر قضیه خطوط موازی

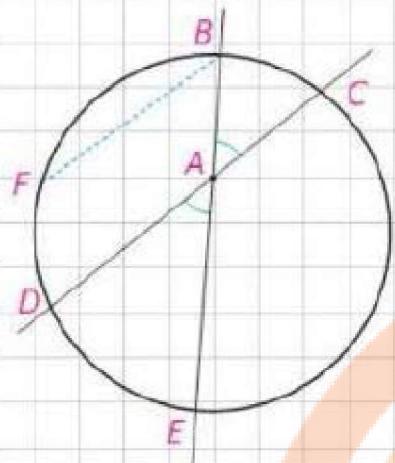
زاویه‌ی FCE مساحتی است. پس نصف کمان مقابله است یعنی $FCE = \frac{1}{2}\widehat{EF}$.

$$FCE = \frac{1}{2}\widehat{EF} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DC})$$

بنابر فعالیت قبل بند (۱) می‌دانیم: $\widehat{DF} = \widehat{BC}$ پس داریم:

تلاشی در مسیر موفقیت

- رأس زاویه DAE مانند شکل مقابل در درون دایره میباشد و اخلاع این زاویه کمان های BC و DE را مشخص کرده اند.



- از نقطه ب خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از نساوی های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$

DAE = FBE و $BF \parallel DC$

زاویه FBE محاطی است. پس نصف کمان مقابل است یعنی $FBE = \frac{1}{2}\widehat{EF}$.

بازوجه به شکل $FBE = \frac{1}{2}\widehat{EF} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE})$

بنابر فعالیت قبل بند (۱) می دانیم:

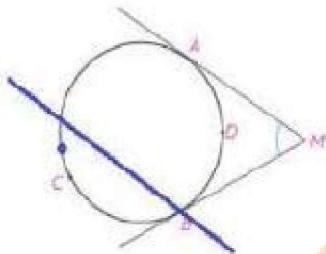
$$DAE = FBE = \frac{1}{2}\widehat{EF} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} + \widehat{BC})$$

پس داریم:

لذت‌بخشی
تلاشی در مسیر موفقیت

۱. در شکل های زیر ثابت کنید:

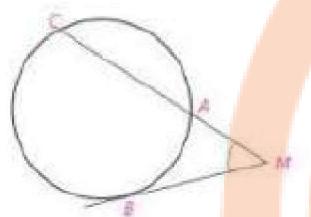
راهنمایی: از نقطه B خطی موازی پلخ دیگر زاویه رسم کنید.



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

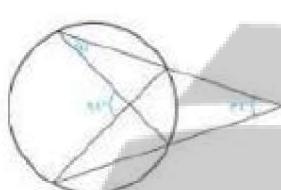
$$MB \parallel AM \text{ و مورب } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{M} = \widehat{B_1} \\ \widehat{B_1} = \frac{1}{2} \widehat{BE} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{M} = \frac{1}{2} \widehat{BE} = \frac{1}{2} (\widehat{ACB} - \widehat{ADB})$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$



$$MB \parallel MC \text{ و مورب } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{M} = \widehat{B_1} \\ \widehat{B_1} = \frac{1}{2} \widehat{BE} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{M} = \frac{1}{2} \widehat{BE} = \frac{1}{2} (\widehat{BE} - \widehat{CE}) \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

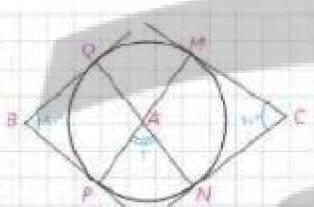
۲. در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به دست آورید.



$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{QD} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AE}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{AE} = 182^\circ \\ \widehat{Q} = \frac{\widehat{AE} - \widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{AE} - \widehat{BD} = 62^\circ \end{array} \right. \Rightarrow 2\widehat{AE} = 244^\circ \Rightarrow \widehat{AE} = 122^\circ$$

$$\widehat{BD} + 122^\circ = 182^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 60^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{BD}}{2} = 30^\circ$$

۳. در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



$$1) \quad \widehat{PQ} = \frac{\widehat{MPN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{MQP} - \widehat{MN} = 14^\circ \Rightarrow \widehat{MQ} + \widehat{QP} + \widehat{PN} - \widehat{MN} = 14^\circ$$

$$2) \quad \widehat{A} = \frac{\widehat{PNMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \widehat{PNMQ} - \widehat{PQ} = 14^\circ \Rightarrow \widehat{PN} + \widehat{MN} + \widehat{MQ} - \widehat{PQ} = 14^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{PN} + \widehat{MQ}}{2} \Rightarrow \widehat{PN} + \widehat{MQ} = 2\widehat{A} \Rightarrow \widehat{MN} + \widehat{PN} + \widehat{PQ} + \widehat{MQ} = 28^\circ$$

$$1) + 2) \Rightarrow \widehat{MN} - \widehat{PQ} = 14^\circ \quad \widehat{MN} - \widehat{PQ} = 14^\circ \quad \widehat{MN} - \widehat{PQ} + \widehat{PN} + \widehat{MQ} = 14^\circ + 2A$$

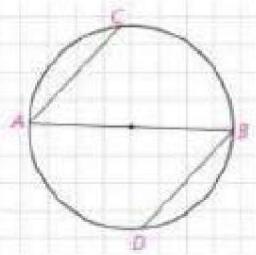
۴. در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ ، اندازهٔ کمان را به دست آورید.

$$= \widehat{D} \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \quad \widehat{AD} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{BC}}{2} = \widehat{BD} + \widehat{AC} = 150^\circ \Rightarrow 2\widehat{BD} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{A}$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} + \widehat{AB} = 280^\circ \Rightarrow 75^\circ + \widehat{CD} + 75^\circ + 150^\circ = 280^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 20^\circ$$

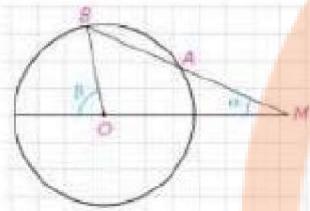
تلاشی در مسیر موفقیت

۵. در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند. ثابت کنید: $AC = BD$



$$\left\{ \begin{array}{l} CO = DO = \text{شعاع} \\ OA = OB = \text{شعاع} \\ AC \parallel BD \text{ و } CD \text{ مورب} \rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 \end{array} \right. \Rightarrow ACO \cong BOD \Rightarrow AC = BD$$

۶. دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ نشان دهید:



$$\text{حکم: } \beta = \beta = 2\alpha \quad \text{راویده خارجی: } \beta = B + a$$

۷. در دایره $C(O, R)$ با $AB = 10$ و $\overline{AB} = 60^\circ$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

$$\frac{AB}{360^\circ} = \frac{\text{طول مکان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{10}{360^\circ} = \frac{60}{360^\circ} = \frac{10}{2 \times 3 \times \pi} \rightarrow r = 10 = OA = OB$$

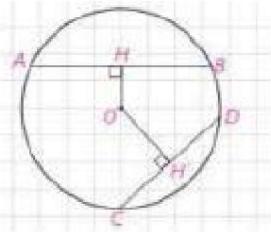
$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB = \text{شعاع} \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AH = BH \\ AB = 10 \end{array} \right. \rightarrow BH = AH = 5 \\ OH = \text{مشترک} \end{array} \right.$$

$$OA^2 = AH^2 + OH^2 = 100 = 25 + OH^2 \Rightarrow OH = 5\sqrt{3}$$

۸. در دایره $C(O, R)$ نشان دهید $AB > CD$ و تنها اگر $OH < OH'$ و $OH < OH'$ از O از دو وتر AB و CD هستند.

راهنمایی: از O به B و C وصل و از قفسیه i فیثاغورس استفاده کنید.

تلاشی در مسیر موفقیت



$$\begin{cases} BH \parallel BO^\perp = BH^\perp + OH^\perp \\ CH \parallel CO^\perp = OH^\perp + CH^\perp \Rightarrow BH^\perp + CH^\perp = CH^\perp + OH^\perp \\ BO = CO \end{cases}$$

از رابطه ۱ و فرض مستله که $OH < OH'$ است نتیجه می شود که $BH < CH$ پس در

نتیجه

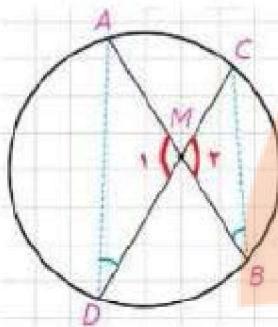
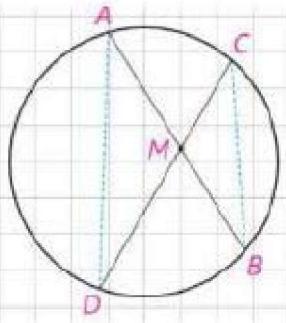
$AB > CD$ خواهد بود



فعالیت صفحه‌ی ۱۸

۱- دو وتر AB و CD در نقطه‌ی M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه‌اند.



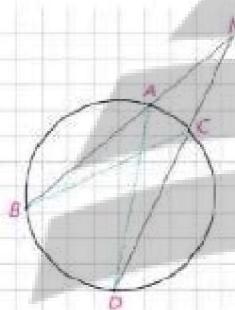
این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \\ \widehat{D} = \widehat{B} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow AMD \cong CMB$$

ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم:

۱ در نتیجه: $AM \cdot BM = CM \cdot DM$

۲- خطهای شامل دو وتر AB و CD در نقطه‌ی M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.



الف) نقطه A را به D و نقطه‌ی C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه‌اند.

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{M} = \widehat{M} \\ \widehat{A} = \widehat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow AMD \cong CMB$$

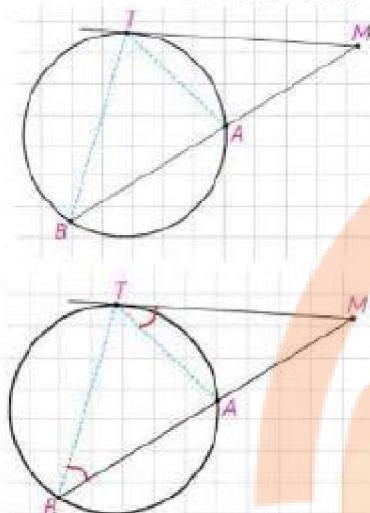
ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم:

۱ در نتیجه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

تلاشی در مسیر موفقیت

هرگاه وترهای AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آنگاه $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

۳- فرض کنیم از نقطه‌ی M (خارج دایره) مانند شکل یک معاس و یک قاطع بر دایره رسم کردایم.



الف) T را به B و A وصل نمایید و مشخص کنید چرا $M\hat{T}A = T\hat{B}M$

$$\left\{ \begin{array}{l} M\hat{T}A = \frac{\widehat{AT}}{2} \\ T\hat{B}M = \frac{\widehat{AT}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow M\hat{T}A = T\hat{B}M$$

ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص کنید و با توجه به این تشابه رابطه‌ی زیر را کامل نمایید.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M} = \bar{M} \\ M\hat{T}A = T\hat{B}M \\ \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB} \end{array} \right. \Rightarrow MTB \cong MAT$$

و در نتیجه: $MT^T = MA \cdot MB$

کار در کلاس صفحه‌ی ۲۰

هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O,R)$ دو معاس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تعاس باشند، ثابت کنید:

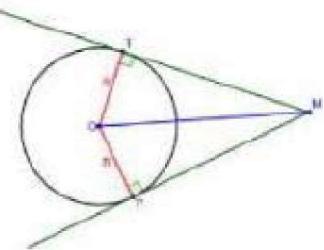
الف) اندازه‌های دو معاس برابرند.

دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائم همنهشت هستند. و بنابر اجزای متناظر $=$

MT'

ب) نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

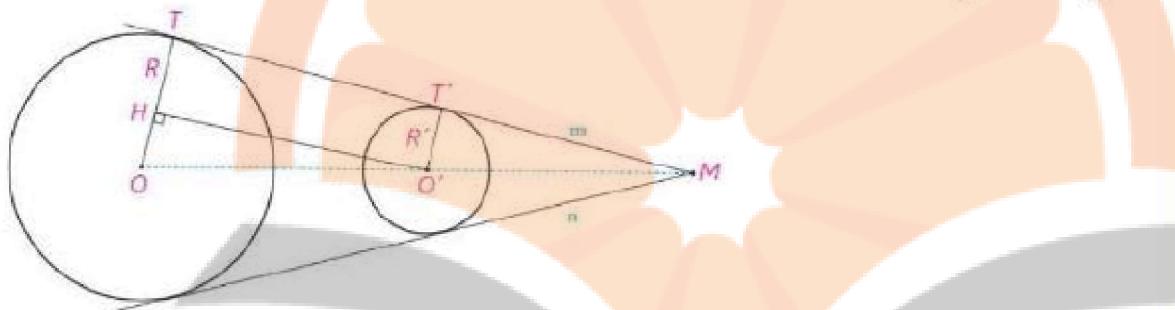
نحوه
تلاشی در مسیر موفقیت



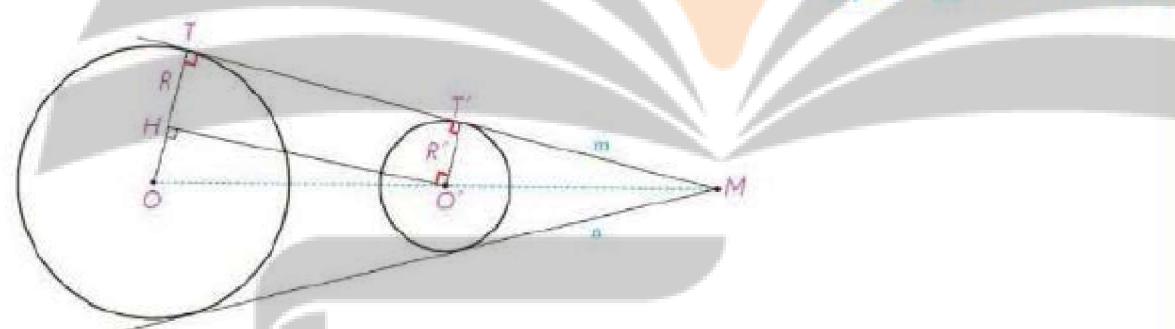
راه اول: دو مثلث OMT و $O'MT'$ به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائم باهم همنهشت هستند. و بنا بر اجزای متناظر $\hat{O}MT = \hat{O'MT}'$ راه دوم: فاصله‌ی نقطه‌ی O از دو ضلع زاویه TMT' به یک فاصله است. پس بنا بر خاصیت نیمساز زاویه نقطه‌ی O روی نیمساز این زاویه است. یعنی تیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

فعالیت صفحه‌های ۲۱ و ۲۲

- فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و $O'T'$ رسم شده است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر باشد: از O' خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.



الف) $TT'O'H$ مستطیل است؛ چرا؟



شعاع‌های OT و $O'T'$ بر خط m در نقاط T و T' عصودند و چون $O'H$ موازی خط m است پس بنابر قضیه خطوط موازی $\hat{T} = \hat{H} = 90^\circ$ و $\hat{T}' = \hat{O'} = 90^\circ$ بنابراین چهار ضلعی $TT'O'H$ چهار زاویه قائم دارد پس مستطیل است.

تلاشی در مسیر موفقیت

ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'H$. تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT' = \sqrt{d^r - (R - R')^r}$$

$$O'H = TT' \Rightarrow O'T' = R' \text{ و } OT = R \text{ و } OO' = d$$

$$OO'H = \bar{H} = 90^\circ \Rightarrow O'H^r + OH^r = \dots^r \Rightarrow O'H^r = \dots^r - OH^r \Rightarrow O'H$$

$$= \sqrt{d^r - (OT - OT')^r} \xrightarrow{O'H = TT', OT = R, OT' = R'} TT' = \sqrt{d^r - (R - R')^r}$$

پ) با توجه به کار در کلاس قبل بخوبید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع باشند، نقطه‌ی تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

فرض کنیم این دو مماس مشترک در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کنند. با توجه به بند (ب) کار در کلاس قبل $O'M$ نیمساز زاویه M است. همچنین OM هم نیمساز زاویه M است و چون هر زاویه یک نیمساز دارد در نتیجه OM و

$O'M$ بر هم منطبق هستند در نتیجه نقطه‌ی تقاطع مماس هاروی خط OO' قرار دارد.

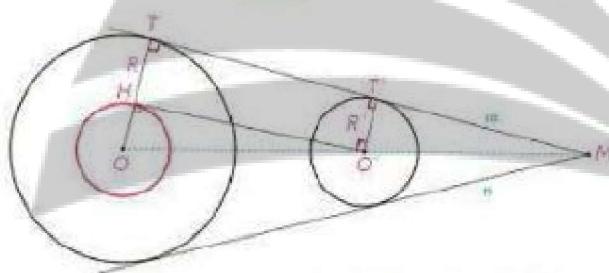
ت) به مرکز O و به شعاع R دایره‌ای رسم کنید. پاره خط $O'H$ برای دایره‌ی رسم شده چگونه خطی است؟

پاره خط OH بر این دایره مماس است.

ت) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد. از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو

دایره معلوم است، می‌توان دایره‌ی مطروح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛

در این صورت چگونه می‌توانید مماس TT' را بر آن رسم کرد؟



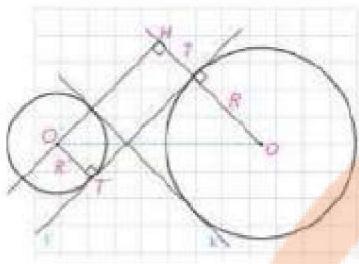
از نقطه‌ی O به H وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی (C) را در نقطه‌ی T قطع کند. سپس از این نقطه خطی

موازی $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط در نقطه‌ی T' بر دایره‌ی (C) مماس می‌شود.



۲- دو مماس مشترک او نیز بر دو دایره متاخراج مطابق شکل رسم شده است مرکزهای دو دایره در دو طرف مماس مشترک‌اند. با یه کار بودن قضیه فیثاغورس در $\triangle O'OH$ مانند قبلی نشان دهید:

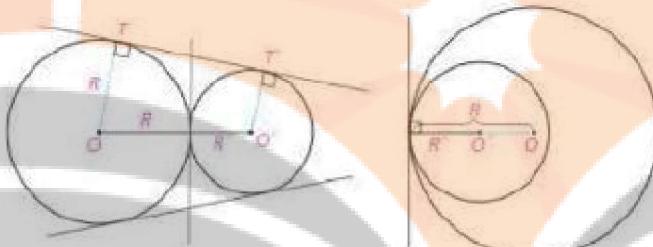
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$



با توجه به شکل چهارضلعی $O'HOT'$ مستطیل است پس $O'H = O'T'$ و در نتیجه: همچنین

$$\begin{aligned} O'OH : H &= 90^\circ \Rightarrow O'H^2 \\ &= OO'^2 - OH^2 \xrightarrow{O'H = O'T', OH = R + R', OO' = d} TT'^2 \\ &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \end{aligned}$$

۳- دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می‌نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دو طرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونوی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می‌نامند.



مماس خارج‌الدند
سه مماس مشترک دارد.
 $OO' = R + R'$

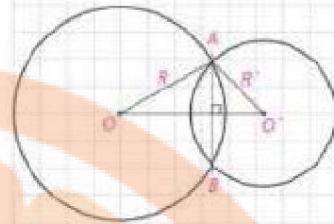
مماس داخل‌الدند
 فقط یک مماس مشترک دارد.
 $OO' = |R - R'|$

با استفاده از دستور محاسبه‌ی طول مماس مشترک خارجی، نشان دهد در دو دایره مماس خارج.

$$\begin{aligned} TT' &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \xrightarrow{d=R+R'} TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} \\ \Rightarrow TT' &= \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - (R^2 + R'^2 + 2RR')} \\ &= \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - R^2 - R'^2 + 2RR'} \Rightarrow TT' = \sqrt{4RR'} \Rightarrow TT' = 2\sqrt{RR'} \end{aligned}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

۴- دو دایره متقاطع، دو دایره را که فقط دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامند. در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند. و $|R - R'| < OO' < R + R'$ چرا؟



با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AOO' داریم:

$$1) OO' < R + R'$$

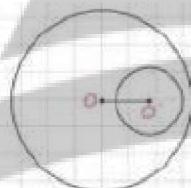
$$2) \begin{cases} R' < OO' + R \Rightarrow -OO' < R - R' \Rightarrow -OO' < R - R' < OO' \Rightarrow |R - R'| < OO' \\ R < OO' + R' \Rightarrow R - R' < OO' \end{cases}$$

$$\rightarrow |R - R'| < OO' < R + R'$$

پاره خط AB ، که دو سر آن روز هر دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. چرا پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است؟

۱) $O'A = O'B = R'$ و $OA = OB = R$ قرار دارد و $O/A = O/B = R'$ بنابر خاصیت عمود منصف نقاط O و O' روی عمود منصف AB قرار دارد.

چون عمود منصف هر پاره خط یکتا است در نتیجه پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است.



$$OO' < |R - R'|$$

۵- دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها

$$OO' = |R - R'|$$

لذت‌بخشی

تلاشی در مسیر موفقیت

۱. در دایره‌ی $C(O, R)$ وتر $AB = 11\text{cm}$ به طول ۹ سانتیمتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر

آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

$$\begin{cases} 18 = AM \cdot MB \\ AM + MB = 11 \end{cases} \Rightarrow AM = 2 \quad MB = 9$$

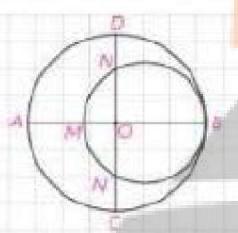
$$\begin{cases} DM \cdot MC = AM \cdot MB \\ DM + MC = 9 \\ \frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 3DM = 9 \quad DM = 3 \quad MC = 6$$

۲. از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم (روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و طول‌های PB و PC را به دست آورید.

$$PA^2 = PB \cdot PC \quad 300 = PB(PB + 20) \quad PB = 10 \quad PC = 30$$

۳. در شکل مقابل، دو دایره برحمناس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر برحمناس عمودند. اگر $AM = 16$ و

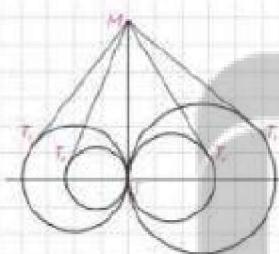
$ND = 10$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



۴. مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برحمناس‌اند و از نقطه M روی عماق مشترک آنها بر دایره‌ها

مماس رسم کرده ایم؛ ثابت کنید

$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$



تلاشی در مسیر موفقیت

۵. طول شعاع های دو دایره ای متاخراج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المركزین آنها مساوی ۸ واحد است.

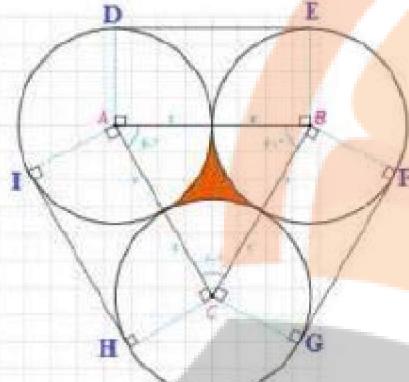
$$HH = \sqrt{d^2 - (R - \hat{R})^2} \Rightarrow R - \hat{R} = 1$$

$$TT = \sqrt{15} \quad OO = d = 8 \quad HH = 3\sqrt{7}$$

$$TT = \sqrt{d^2 - (R + \hat{R})^2} \quad 15 = 64 - (R + \hat{R})^2 \Rightarrow R + \hat{R} = 7 \quad R = 4 \quad \hat{R} = 3$$

۶. سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو برحهم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله ای نخی بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$ همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر باشد.

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r$$



$$DE = FG = HI = 2r \quad \widehat{EF} + \widehat{GH} + \widehat{ID} = 2\pi r$$

$$\text{طول نخ} = 3(2r) + 2\pi r = 6r + 2\pi r$$

$$4r^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{h \cdot 2r}{2} = r^2\sqrt{3}$$

مساحت مثلث

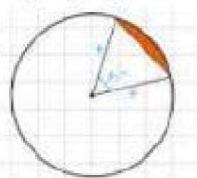
$$= r^2\sqrt{3} - \left(3 \times \frac{1}{6}\pi r^2 \right) = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

۷. طول خط المركزین دو دایره ای مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه ای محدود بین آنها π ۱۶ سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.

$$\pi r^2 - \pi \hat{r}^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 - \hat{R}^2 = 16 \Rightarrow (R - \hat{R}) = (R + \hat{R}) = 4 \quad OO = R - \hat{R}$$

$$= 2 \quad 2(R + \hat{R}) = 16 \Rightarrow R + \hat{R} = 8 \quad R - \hat{R} = 2 \quad R = 5 \quad \hat{R} = 3$$

۸. مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه ای سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.



$$S_{\text{دایره}} = 16\pi \Rightarrow \frac{1}{6}S = \frac{8}{3}\pi \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

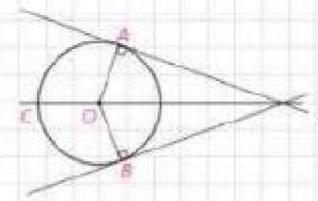
یک مثلث

$$= \frac{2\sqrt{3} \times 4}{2} = 4\sqrt{3}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

فعالیت صفحه‌های ۲۴ و ۲۵

فرض کنید دایره‌ی C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.
(الف)



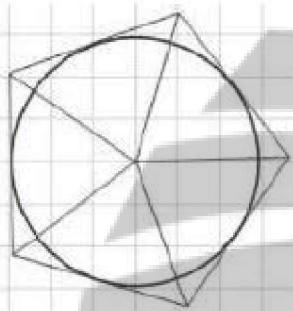
۱- پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اصلاح با دایره وصل می‌کند رسم کنید و آنها را OA و OB بنامید.

۲- پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی است؟
شعاع‌های دایره‌اند.

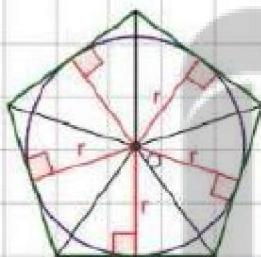
۳- فاصله‌ی نقطه‌ی O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

باهم برابرند. زیرا شعاع نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

۴- با توجه به (۲) و (۳) فاصله‌ی مرکز دایره از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و بنابراین نقطه‌ی O روی نیمساز زاویه است.

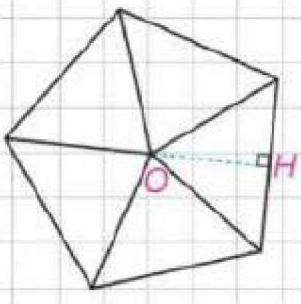


۵- فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چندضلعی محاط شده باشد. چرا مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی جند ضلعی است؟
بنابراین چندضلعی محاطی، اضلاع چندضلعی بر دایره مماس هستند و می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. بنابراین شعاع‌ها همان فاصله‌ی مرکز دایره از اضلاع چندضلعی هستند و همکنی باهم برابرند. بنابراین نیمساز مرکز این دایره روی نیمساز هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی است به عبارتی مرکز دایره محل برخورد نیمسازهای داخلی چندضلعی است.

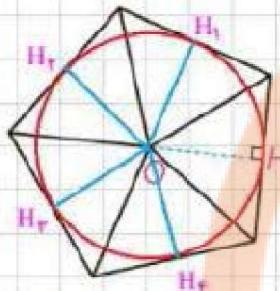


نحوه
تلاشی در مسیر موفقیت

ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای زوایای داخلی آن در نقطه‌ی O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه نوع دایره‌ای است؟



نقطه‌ی O روی نیمساز زوایای داخلی است پس بنا بر خاصیت نیمسازها $OH = OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$



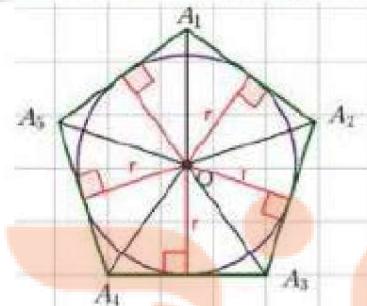
هچین OH_1 و OH_2 و OH_3 و OH_4 همگی بر اصلاح عمود هستند. در نتیجه وقتی دایره‌ای به شعاع OH رسم می‌کنیم شعاع‌ها بر اصلاح‌ها بر اصلاح عمود هستند پس اصلاح‌ها بر دایره در نقطه‌ی نمسان عومدند یعنی دایره بر اصلاح‌ها چند ضلعی مماس است در نتیجه بنا به تعریف دایره محاطی است.

بنابراین، یک چند ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌مرس باشند.
ابن نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

کار در کلاس صفحه‌ی ۲۵

اگر در یک n -ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2P$ شعاع دایره محاطی برابر r باشد،
نشان دهید: $S=rp$

راهنمایی: کافی است مساحت n - مثلث را محاسبه، و با هم جمع کنید.



تلاشی در مسیر موفقیت

$$S = \frac{1}{2}r \cdot A_1 A_\rho + \frac{1}{2}r \cdot A_\rho A_\varphi + \frac{1}{2}r \cdot A_\varphi A_\delta + \frac{1}{2}r \cdot A_\delta A_n + \cdots + \frac{1}{2}r \cdot A_{n-1} A_n = \frac{1}{2}r(A_1 A_\rho + A_\rho A_\varphi + \cdots + A_{n-1} A_n)$$

$$= \frac{1}{2}r \times 2P \Rightarrow S = rp$$

فعالیت صفحه‌ی ۲۶

در شکل داریم $S(ABC) = S(OAC) + S(OAB) - S(OBC)$ اگر مساحت ΔABC را با S نشان دهیم،

$$\text{اگر محیط مثلث را با } p \text{ نشان دهیم، داریم، } r_a = \frac{1}{2}p(a+b+c) \text{ پس}$$

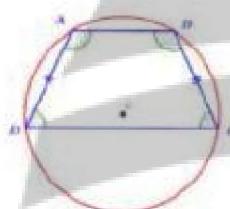
$$\text{و بنابراین } S = r_a(P-a) = r_a(p-a) = a + b + c - 2a = b + c - a \text{ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

کار دو گلاس صفحه‌ی ۲۸

با توجه به این فضیه‌ها بررسی کنید که چهار ضلعی‌های ذوزنقه، کایت، متوازی الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع کدام محاطی، و کدام محیطی است. ذوزنقه متساوی الساقین چطور؟

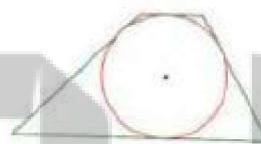
ذوزنقه در حالت کلی محاطی نیست زیرا زوایای متقابل آن مکمل نیستند. اما اگر ذوزنقه متساوی الساقین باشد داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 180^\circ \xrightarrow{C=D} A + C = 180^\circ \\ A + D = 180^\circ \xrightarrow{A=B} B + D = 180^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \text{ذوزنقه } ABCD \text{ محاطی است}$$

یک ذوزنقه در حالت کلی محیطی نیست اما می‌تواند محیطی باشد به شرط آن که نیمسازهای داخلی همسر باشند.

مانند شکل مقابل:

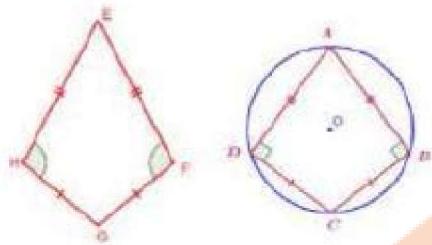


یک کایت در حالت کلی محاطی نیست ولی اگر دو زاویه متقابل آن قائم باشند می‌تواند محاطی باشد.

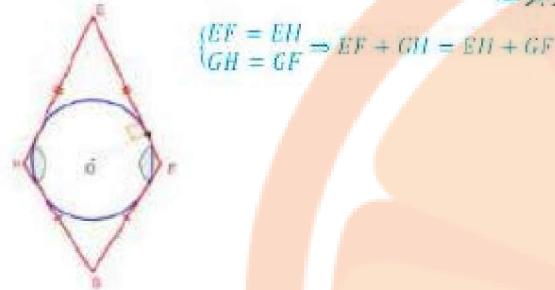
تلاشی در مسیر موفقیت

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \xrightarrow{\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

پس بنابر قضیه‌ی کایت $ABCD$ محاطی است.



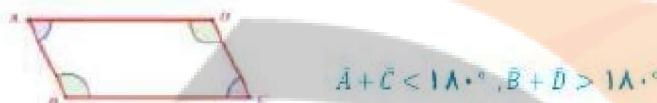
یک کایت حتماً محیطی است زیرا مجموع اضلاع مقابل با هم برابرند.



$$\begin{cases} EF = EH \\ GH = GF \end{cases} \Rightarrow EF + GH = EH + GF$$

یک متوازی‌الاضلاع در حالت کلی محاطی نیست: زیرا:

زاویه‌های مقابل نمی‌توانند مساوی 180° باشند.

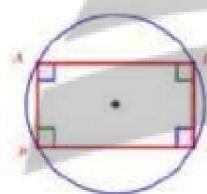


$$A + C < 180^\circ, B + D > 180^\circ$$

یک متوازی‌الاضلاع در حالت کلی محاطی نیست: زیرا اضلاع مقابل دو به دو برابرند و

مجموع آنها با هم برابر نیست با توجه به شکل فوق: $AB + DC < AD + BC$

یک مستطیلی محاطی است: زیرا مجموع زاویه‌های مقابل همیشه برابر با 180° است.



یک مستطیل محیطی نیست زیرا اضلاع مقابل برابرند و مجموع آن‌ها با هم برابر

نیست با توجه به شکل:

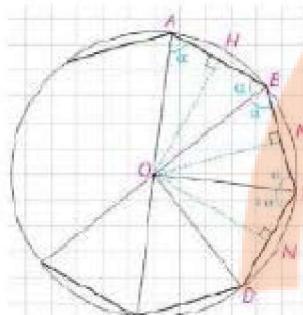
$$AB + DC < AD + BC$$

نحوه تلاشی در مسیر موفقیت

یک لوزی صحاطی نیست: زیرا مجموع زاویه های مقابل 180° نیست.
 یک لوزی محیطی است: زیرا مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.
 یک مربع هم می تواند محیطی و هم صحاطی باشد. زیرا هم مجموع زاویه های مقابل 180° است و هم مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

فعالیت صفحه ۲۹

فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم ... $ABCD \dots \alpha$ باشد: عمود منصفهای دو ضلع AB و BC را درسم می کنیم.
 فرض کنیم در O متقطع آند. بنابراین $OA = OB = OC = OD$
 پس $\Delta OAB \cong \Delta OBC$ چرا؟



دو مثلث به حالت (ض-ض-ض) هستند.

$$\overline{AOB} = \overline{OBA} + \overline{OBC} \xrightarrow{\overline{OBA} = \overline{OBC}} 2\alpha = 2\overline{OBA} = \overline{OAB} = \overline{OBA} = \overline{OBC} = \overline{OCB} = \alpha$$

اگون از D به O وصل می کنیم. چرا اندازه \overline{ODC} برابر α است؟ چرا؟

$OA = OB = OC = OD$ و ...

$$\overline{BCD} = \overline{OCB} + \overline{OCD} = 2\alpha - \alpha + \overline{OCD} = \overline{OCD} - \alpha$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OC = OC \\ BC = DC \Rightarrow \overline{OCD} = \overline{OCB} \\ \overline{OCD} = \overline{OCB} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} OD = OB$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OD = OB \\ OA = OB = OC = OD \end{array} \right. \Rightarrow OA = OB = OC = OD$$

با ادامه این روند داریم:

دایره ای است که از تمام رأس های n ضلعی منتظم $OH = ON = OM = \dots = OA = OB = OC = OD = \dots$

دایره ای است که از تمام رأس های n ضلعی منتظم می گذرد.

به همین ترتیب n از تمام ضلع ها به یک فاصله است: پس مرکز دایره ای است: پس بر تمام ضلع های n ضلعی منتظم می باشد.

تلashی در مسیر موفقیت

۱. ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{B\hat{C}D}{2} \\ \hat{C} = \frac{B\hat{A}D}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{B} = \frac{\hat{A}\hat{D}C}{2} \\ \hat{D} = \frac{\hat{A}\hat{B}C}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \frac{\hat{A}\hat{D}C + \hat{A}\hat{B}C}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

زاویه های مقابل مکمل هستند پس چهارضلعی محاطی است.

۲. مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره ای به شعاع R محاط شده باشد.

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{h}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{R} \Rightarrow h = \frac{R}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{a}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{R\sqrt{3}}{2} \\ S_{\text{تساوی الاضلاع}} &= 3 \times \frac{1}{2} \times R\sqrt{3} \times \frac{R}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

۳. ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه ی مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره ی محیطی مثلث قطع می کنند.

۴. یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \quad \text{در ذوزنقه محاطی}$$

$$\begin{array}{l} \text{مثلث} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{h_1}{R} \\ \cos \alpha = \frac{a_1}{R} \end{array} \right. \quad \text{ارتفاع} = R \sin \alpha \quad \text{قاعده} = 2R \cos \alpha \quad S = R^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{array}$$

۵- اگر r_a , r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

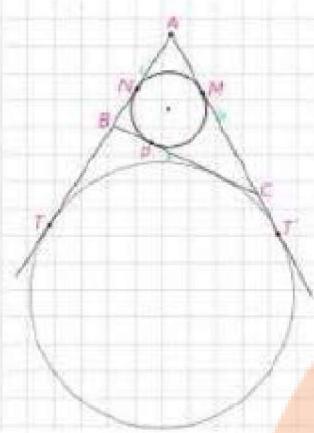
$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{r} \\ r_a &= \frac{S}{p-a} \quad r_b = \frac{S}{p-b} \quad r_c = \frac{S}{p-c} \\ R &= \frac{P}{r} = \frac{a+b+c}{r} \\ \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{3P - (a+b+c)}{S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

به همین ترتیب اگر r_a , r_b و r_c اندازه های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} &= \frac{1}{r} \\ \left\{ \begin{array}{l} h_a = r_a \\ h_b = r_b \\ h_c = r_c \end{array} \right. \end{aligned}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

طبق قسمت اول سوال حل می شود.



۶) اگر نقاط تماش دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن N, M و P باشند و T و T' نقطه های تماش یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$$AN = AN = P - A$$

$$BN = BP = P - B, CM = CP = P - C$$

$$AT = AT' = P$$

۷) یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلعی های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آنگاه

$$CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \quad AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$$

$$\begin{cases} CD = CH + HD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \\ OB = OM = OA = r \\ AM = MB \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tan \frac{180^\circ}{n} = \frac{HD}{OM} = \frac{MB}{r} \Rightarrow MB = r \tan \frac{180^\circ}{n} \\ AB = AM + MB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \end{cases}$$

$$\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{HD}{r} \Rightarrow HD = CH = r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

۸) شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته ایم. الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

زاویه های 60° ضلعی 120° درجه هستند از قانون زوایای نیم صفحه در می یابیم که زوایای مثلث FEP و DNC و ABM درجه هستند بنابراین مثلث MNP متساوی الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

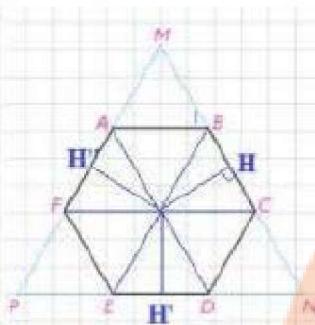
$$\frac{h \times 2a}{2} = h \times a = \text{مساحت شش ضلعی}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

$$MNP = \frac{3h \times 6a}{2} = 9ha$$

$$\frac{\text{مساحت شش ضلعی}}{S_{MNP}} = \frac{6ha}{9ha} = \frac{2}{3}$$

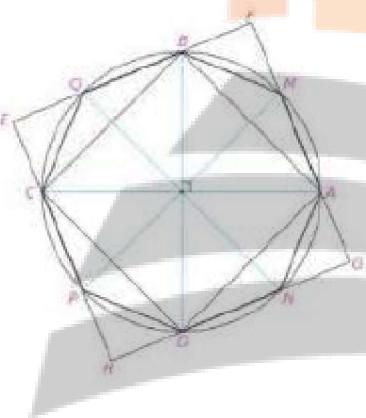
ب) از نقطه‌ی Dلخواه درون شش ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر ED، BC و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه‌ی پایه‌ی ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟



ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TAF، TDE، TBC و TCH کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAH} + S_{TEF} + S_{THD} = \frac{3S_{TBC} + 3S_{TDE} + 3S_{TAF}}{3S_{MNP}} = \frac{3h \times 1a}{3 \times 9ha} = \frac{1}{3} =$$

-۹- دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است. چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.

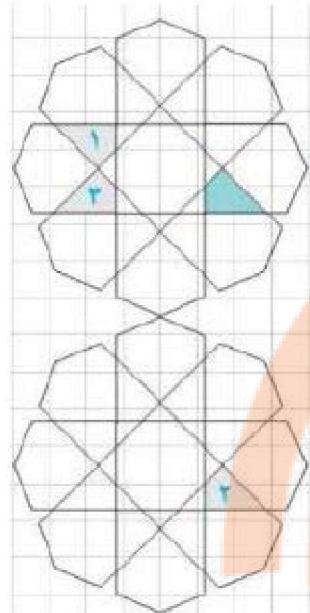


ABCD در دایره محاط است. قطرهایش برهم عمود هستند و زوایای رو به روی آن مکمل است پس یک مربع است.
چون همه‌ی عمود منصف‌ها هم‌دیگر را در شعاع دایره قطع کرده‌اند و هم ضلعی به وجود آمده معاطی است و اندازه‌ی زوایا همه با هم برابر نصف مکان رو به روی خود هستند این چند ضلعی منتظم می‌باشد.

لذت‌بخشی

تلاشی در مسیر موفقیت

۱- به تصویر روبه رو دقت کنید.



اگر چهارضلعی های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده بدانیم:

الف) کدام چهارضلعی، انتقال یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده است؟ **چهارضلعی ۲**
انتقال یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده است.

ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ شده است؟ **چهارضلعی ۳** بازتاب
چهارضلعی رنگ شده است.

پ) کدام شکل، دوران یافته‌ی شکل رنگ شده است؟ **چهارضلعی ۱** دوران یافته
چهارضلعی رنگ شده است.

۲- الف) بازتاب شکل روبه رو را نسبت به خط d رسم کنید.

(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره‌خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟

ابتدا از هر رأس مثلث ABC بر خط d یک خط عمود رسم می‌کنیم سپس به همان اندازه خط عمود را امتداد می‌دهیم تا تصویر آن رأس را بدست آوریم. بنابراین $BF = FC'$ و $AE = EA'$. حال نقاط بدست آمده را به هم وصل می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC است. فاصله هر نقطه تا تصویرش توسط d نصف شده است، بنابراین خط d عمود منصف پاره‌خطی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟

اندازه‌ها را چطور؟ بله، این تبدیل موقعیت شکل را تفسیر می‌دهد ولی اندازه‌ها ثابت می‌مانند و تغییر نمی‌کند.

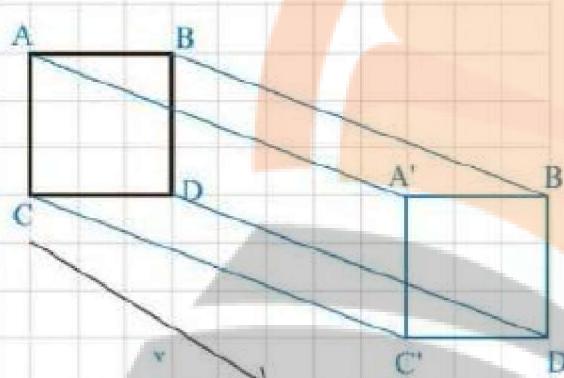
تلashی در مسیر موفقیت

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟ خیر، زیرا شیب خط CA و CA' که پاره خط متناظر آن است برابر نیست.

ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

اگر خطی که می‌خواهیم آن را بازتاب دهیم یا عمود بر محور بازتاب باشد آنگاه شیب خطها حفظ می‌شوند. در شکل قسمت الف می‌بینیم که پاره خط BC قسمتی از خط عمود بر v است و تصویر این پاره خط نیز روی همان خط قرار می‌گیرد بنابراین شیب خط BC برابر شیب خط $B'C'$ است و اگر خط موردنظر موازی محور بازتاب باشد مانند خط BA ، شیب آن حفظ می‌شود و تصویر آن نیز موازی محور بازتاب است.

۳- الف) تصویر شکل رویه را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید).



همه رأس‌های مریع را باید با توجه به بردار v ۵ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین انتقال بدھیم تا تصویر هر رأس را بدست آوریم. با توجه شکل همهی بردارهایی که هر نقطه را تصویرش برده است برابر بردار v هستند. نقاط تصویر را به هم وصل می‌کنیم. مریع انتقال پافته مریع $ABCD$ تحت بردار v است در این حالت پاره خطهایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

پاره خطهایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند موازیند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟

اندازه‌ها را جطیور؟ این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی‌کند اما اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟ بله، تحت این تبدیل شیب‌ها حفظ می‌شوند و تغییر نمی‌کنند.

تلاشی در مسیر موفقیت

ت) آیا در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می‌شود؟ بله، تحت این تبدیل، زاویه‌ها در شکل اولیه و تصویر آن حفظ می‌شود.

۴- در سال‌های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ α ، کافی است هر نقطه از شکل، مثل نقطهٔ A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک زاویه‌ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره خطی به اندازهٔ OA جدا کنیم تا نقطهٔ A' به دست آید.

می‌خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O و 90° درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B را دوران داده‌ایم.

الف) به همین ترتیب تصویر نقطهٔ C را پیدا، و شکل را کامل کنید.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟

اندازه‌ها را چطور؟ این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی‌کند ولی اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) آیا در این تبدیل، نسبت پاره خط اولیه با نسبت پاره خط تصویر آن برابر است؟

این تبدیل، شب را حفظ نمی‌کند بنابراین شب پاره خط اولیه با شب پاره خط تصویر آن برابر نیست.

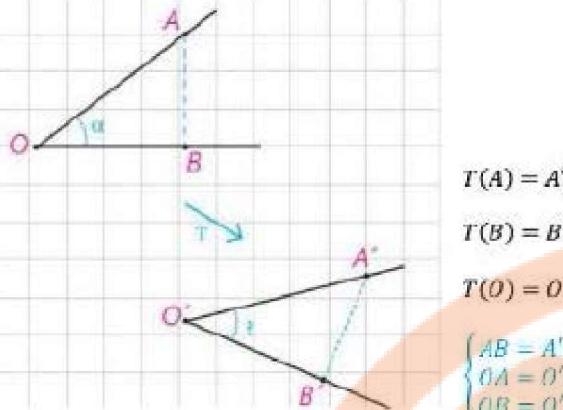
ت) آیا می‌توانید زاویهٔ دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شب خط را حفظ کند؟

دوران تحت را زاویه‌های 0° ، 180° و 360° درجه شب خط حفظ می‌شود.

فعالیت صفحه ۳۶

می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولها اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

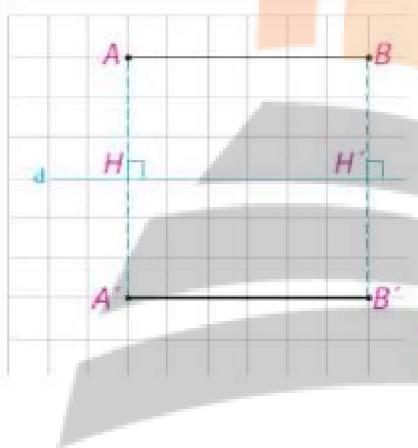
تلاشی در مسیر موفقیت



و داریم:

می خواهیم با استدلال دقیق تری نشان دهیم بازتاب، تبدیل طولی است. حالت های مختلف یک پاره خط را نسبت به خط بازتاب در نظر می گیریم و در هر حالت نشان می دهیم که اندازه هی پاره خط با اندازه هی تصویر آن برابر است.

الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط ℓ موازی است. بازناب A و B را نسبت به خط ℓ پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم.



چرا $A'B'$ با خطوط d و AB موازی است؟

$$\begin{cases} \bar{A} = H = 90^\circ & \leftarrow AB || d \text{ مورب } AH \\ \bar{B} = \bar{H}' = 90^\circ & \leftarrow AB || d \text{ مورب } AH \end{cases}$$

$\Rightarrow ABH'H$ مستطيل است

می‌دانیم که چهارضلعی که همه زوایای آن قائم باشند مستطیل است و در هر مستطیل اضلاع مقابل با هم برابر هستند.

بنابریں داریم:

$$\begin{cases} AH = BH' \\ A'H = H'B' \\ AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{cases} \Rightarrow AA' = BB' \quad \Rightarrow \quad \text{متوازي اقلاغ} = A'B' \parallel AB$$

و همچنین داریم:

$$\begin{cases} A'B' \parallel AB \\ AB \parallel d \end{cases} \rightarrow A'B' \parallel d$$

بنابراین اضلاع رو به روی هم موازی هستند و زاویه‌ها قائمه هستند.

پس چهارضلعی $A'B'C'D'$ یک مستطیل است و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که اضلاع رو به رو، دو به دو هماندازه‌اند:

$$AB = A'B'$$

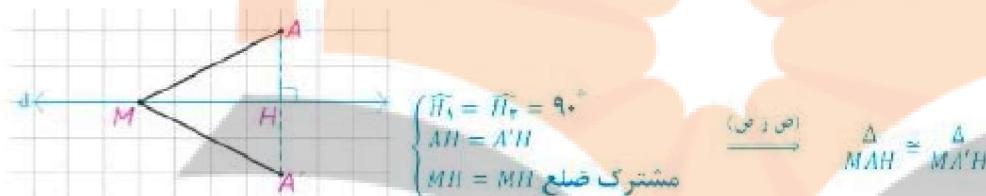
ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد.

(اگر هر دو نقطه‌ی ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدینه است؛ چرا؟)

چون در این حالت بازتاب پاره خط AM بر روی خط d و بر روی خودش منطبق می‌شود بنابراین:

$$\begin{cases} S(M) = M \\ S(A) = A \end{cases} \Rightarrow AM = AM$$

آیا می‌توانید به کمک هم نهشتی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA = MA'$ ارائه کنید؟



بنابراین اجزاء متناظر شان برابرند یعنی:

$$MA = MA'$$

$$AMH = A'MH$$

$$A = A'$$

آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره خط کمک بگیرید).

چون خط d عمود منصف AA' است پس هر نقطه روی خط d مانند M از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله است

$$MA = MA'$$

بنابراین:

ب) در حالتی که پاره خط AB با خط بازتاب d ، نه موازی و نه متقاطع باشد، پاره خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطه‌ی M قطع کند.

تلاشی در مسیر موفقیت

نقطه' B' بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا. و پاره خط' MB' را رسم می کنیم. ادعا می کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط' MB' واقع می شود؛ چرا؟ با توجه به قسمت (ب) داریم: $MB = MB'$ بنابراین مثلث' BMB' متساوی الساقین

است و چون خط d عمود منصف' BB' است بنابراین بنابر قضایای مربوط به مثلث متساوی الساقین نیمساز زاویه' BMB' است یعنی: $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ باید نشان دهیم A' تصویر نقطه A نسبت به محور بازتاب

است یعنی:

$$\angle H' = \angle H' \quad \text{و} \quad \angle H' = \angle H' = 90^\circ$$

بنایه قانون خطوط موازی چون $AA' \parallel BB'$ و خط d مورب است

بنابراین:

$$\angle H'_1 = \angle H'_2 = 90^\circ$$

$$\begin{cases} \angle H'_1 = \angle H'_2 = 90^\circ \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \angle H'_1 = \angle H'_2 = 90^\circ \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \\ MHH' = MHH' \end{cases}$$

ضلع مشترک

$$\xrightarrow{\text{(ض)}} \Delta MHH' \cong \Delta MHH' \Rightarrow \begin{cases} HH' = A'H' \\ A = A' \end{cases}$$

حال داریم:

$$\begin{cases} AB = MB - MA \\ A'B' = MB' - MA' \\ MB = MB' \text{ و } MA = MA' \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = A'B'$$

ت) چرا در حالتی که پاره خط AB خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می کنیم و آن را نقطه' A' می نامیم.

پاره خط MA' را رسم می کنیم و امتداد می دهیم و ادعا می کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه' B' هم بر امتداد' MA' واقع است؛ چرا؟

تلاشی در مسیر موفقیت

با توجه به قسم (ب) بازتاب پاره خط MH و MH' بر روی خط ℓ و بر روی خودش منطبق می‌شود و اگر از نقطه A خطی عمود بر ℓ رسم کیم و به همان اندازه امتداد دهیم به نقطه A' می‌رسیم و همین طور برای نقطه B نیز تکرار می‌کنیم تا به نقطه B' برسیم. نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} MH = MH' \\ BH = B'H' \\ H_1 = H'_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضد)}} \frac{\Delta}{MHB} \cong \frac{\Delta}{MH'B'} \Rightarrow MB = MB' \quad (1)$$

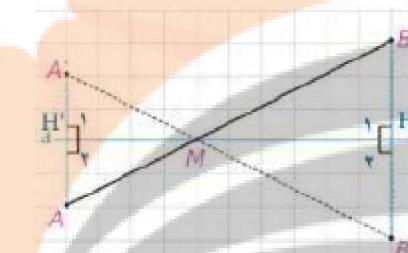
$$\begin{cases} MH' = MH' \\ AH' = AH' \\ H'_1 = H'_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضد)}} \frac{\Delta}{MH'A} \cong \frac{\Delta}{MH'A'} \Rightarrow MA = MA' \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} MA = MA' \\ MB = MB' \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} MA + MB = MA' + MB' \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین MA بر MH' و MA' بر MH منطبق است.

حال داریم:

$$\begin{cases} AB = AM + MB \\ A'B' = A'M + B'M \\ MB = MB' \text{ و } AM = A'M \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



۳۹ فعالیت صفحه

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شبیه خط را هم حفظ می‌کند.

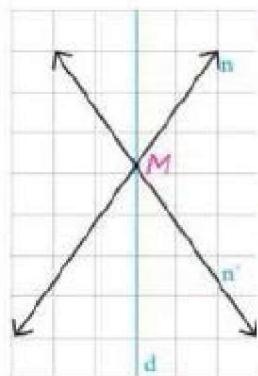
مسئله را برای دو حالت کلی در نظر می‌گیریم؛ وقتی خط داده شده با خط بازتاب موازی باشد و وقتی با آن موازی نباشد.

الف) اگر خط ℓ موازی خط بازتاب ℓ' باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط ℓ'' می‌نامیم.
خطوط ℓ و ℓ'' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟

تلاشی در مسیر موفقیت

می‌دانیم که خط n موازی محور بازتاب یعنی d است. حال پاره‌خطی دلخواه روی خط n در نظر می‌گیریم. بنابراین قسمت (الف) فعالیت قبل، تصویر پاره‌خط AB نسبت به محور بازتاب پاره‌خط $A'B'$ است که با خط d موازی است و از طرفی خط n تصویر خط AB است. بنابراین پاره‌خط $A'B'$ روی خط n قرار دارد. بنابراین خط n با خط d موازی است در نتیجه n موازی d است.

آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند؟



در حالتی که دو خط موازی باشند اگر دارای شیب باشند، شیب خط حفظ می‌شود. (اگر خطی بدون شیب باشد تصویر آن نیز بدون شیب خواهد بود.)

ب) اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد، خطهای d , n و n' در نقطه‌ای مثل M متقطع می‌شوند؛ پس n و n' موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ نمی‌کند بنابراین:

در حالت کلی، بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند.

کار در کلاس صفحه ۴۰

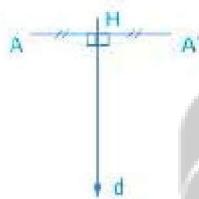
جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید:

الف) وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به خط d کدام نقطه است؟ Δ چرا؟

می‌دانیم که خط d عمودمتصف پاره‌خط $A'A$ است. بنابراین $A'A \perp d$. در نتیجه اگر عمودی از A' بر خط d رسم کیم و به اندازه خودش انداد دهیم به نقطه A می‌رسیم.

ب) قرینه‌ی فرینه‌ی هر نقطه چیست؟ خود آن نقطه است.

در واقع: $A' = S(A)$ و به زبان ساده‌تر $(A')' = S(S(A)) = S(A)$



پ) در هر بازتاب تبدیل یافته‌ی یک مثلث، یک مثلث است که با مثلث اولیه همنهشت است.

ت) در حالتی که پاره‌خط AB نسبت به خط بازتاب موازی باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

تلاشی در مسیر موفقیت

ث) در هر بازتاب نسبت به خط ℓ تبدیل یافته‌ی تمام نقاط روی خط، **روی خط ℓ** است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب **بیشمار** است.

فعالیت صفحه ۴۱

۱- می خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولی است.

الف) اگر پاره خط دلخواه AB با بردار \vec{v} موازی نباشد، تبدیل یافته‌ی AB را با بردار \vec{v} رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید: $AB = A'B'$.

راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبرو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



ب) اگر پاره خط AB با بردار \vec{v} موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید:

$$AB = A'B'$$

$$\begin{cases} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \end{cases} \text{ طبق تعریف انتقال } AA' = BB' \Rightarrow AB = A'B' \quad (1)$$

$$\begin{cases} AB = AA' - BA' \\ A'B' = BB' - BA' \end{cases} \text{ طبق تعریف انتقال } AA' = BB' \Rightarrow AB = A'B' \quad (2)$$

تلاشی در مسیر موفقیت

تذکر: در حالتی که طول بردار \vec{AB} با پاره خط AB برابر است به کمک هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

بنابراین:

قضیه: در هر انتقال، اندازه‌ی هر پاره خط و اندازه‌ی تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولیا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه‌ی P که $.AB = A'B'$ داریم: $T(B) = B'$ و $T(A) = A'$

۲- در هریک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شبیه خط را هم حفظ می‌کند.

در قسمت (الف) نتیجه گرفتیم $AA'B'B$ متوازی الاضلاع است، بنابراین $AB \parallel A'B'$ و $AB = A'B'$ در نتیجه شبیه خط حفظ شده است. در قسمت (ب) و (ب) هر پاره خط و تصویر آن بر روی یک خط قرار داشتند، بنابراین شبیه آن‌ها حفظ شده است.

فعالیت صفحه ۴۲

می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیل طولیاست.

برای دوران دادن هر پاره خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A' و B' حاصل شود. پاره خط $A'B'$ را رسم می‌کنیم.

مستله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم:

الف) مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه‌ی دوران از زاویه‌ی \widehat{AOB} بیشتر باشد.

با توجه به شکل $O_1 + O_4 = O_2 + O_3 = \alpha$

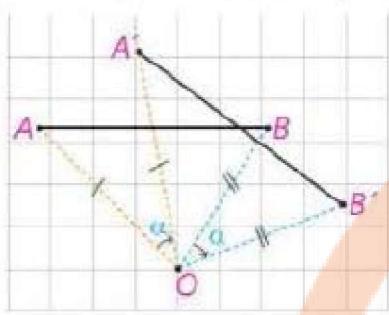
($O_1 = O_2$) $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ پس می‌توان مدعی شد که

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و $O'A'B'$ نشان دهید $AB = A'B'$ هم اندازه‌اند.

تلاشی در مسیر موفقیت

$$\begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{cases} \xrightarrow{\text{بنابراین}} \Delta AOB \cong \Delta A'OB' \Rightarrow AB = A'B'$$

ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره خط AB واقع نباشد ولی زاویه‌ی دوران از زاویه‌ی \overline{AOB} کمتر باشد، باز هم تساوی $AB = A'B'$ برقرار است.

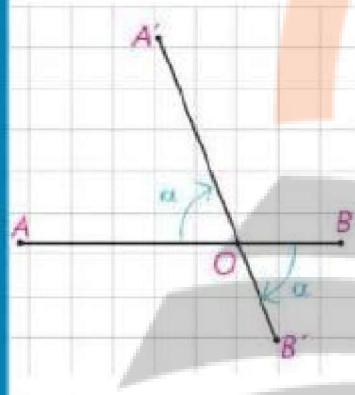


تذکر: در حالتی که \overline{AOB} با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} A\hat{O}B = \alpha + A'\hat{O}B \\ A'\hat{O}B' = A'\hat{O}B + \alpha \end{cases} \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$$

بنابراین:



ب) اگر نقطه‌ی O روی پاره خط AB باشد:

$$\begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{cases} \xrightarrow{\text{بنابراین}} \Delta AOB \cong \Delta A'OB' \Rightarrow AB = A'B'$$

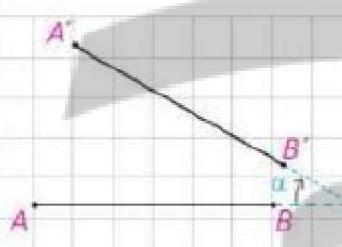
$$AB = AO + OB$$

$$A'B' = A'O + OB'$$

$$AO = A'O \text{ و } OB = OB'$$

$$\Rightarrow AB = A'B'$$

ت) به طور مشابه نشان دهید اگر نقطه‌ی O روی امتداد پاره خط AB باشد، حکم برقرار است.



$$\begin{cases} AB = AO - OB \\ A'B' = A'O - OB' \\ AO = A'O \text{ و } OB = OB' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین:

قضیه: در هر دوران، اندازه‌ی هر پاره خط و تصویر آن با هم برابرند.

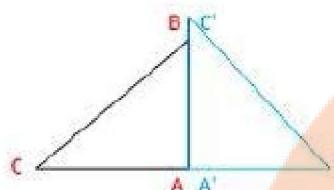
تلاشی در مسیر موفقیت

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که

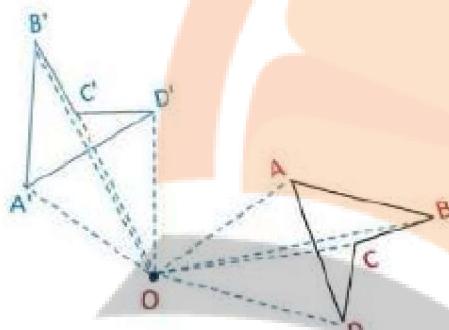
$$AB = A'B' \text{ داریم: } R(B) = B' \text{ و } R(A) = A'$$

کار در کلاس صفحه ۴۳

دوران یافته‌ی هر شکل رارسم کنید.



الف) دوران به مرکز A و با زاویه‌ی 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت:



ب) دوران به مرکز O و با زاویه‌ی 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت:

تمرین صفحه ۴۴

۱. در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $\hat{A}\hat{B}$ بازتاب AB باشد، AB و $\hat{A}\hat{B}$ هم اندازه‌اند.

اگر پاره خط AB در یک طرف خط بازتاب باشد، امتداد خط AB را می‌کشیم تا خط c را در نقطه M قطع کند تصویر A نسبت به خط c را هم مشخص کرده و A' می‌نامیم حال از M به A' وصل می‌کنیم، و برای B نیز به همین ترتیب، حال داریم:

$$\begin{cases} AM = A'M \\ BM = B'M \end{cases} \quad (1)$$
$$AB = AM - BM = A'M - B'M = AB'$$

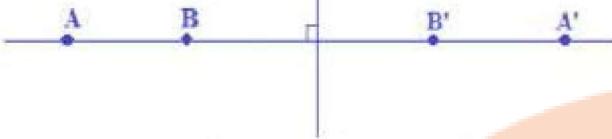
اگر پاره خط AB از خط بازتاب عبور کرده باشد نیز ثابت می‌شود.

$$\begin{cases} AM = A'M \\ BM = B'M \end{cases} \quad (2)$$
$$B'A + AM = BA + A'M \Rightarrow B'A = BA \quad (3)$$

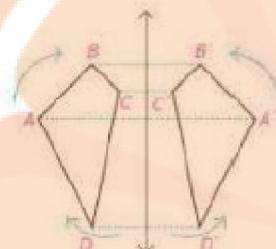
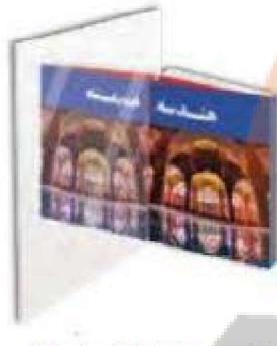
بنایه رابطه‌های (1) و (3) داریم

تلاشی در مسیر موفقیت

$$\begin{cases} AB = AA + AB \\ AB' = AA' + BA \end{cases} \rightarrow AB = AB'$$

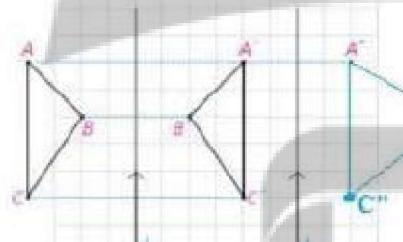


۲- در شکل زیر چهار ضلعی $\tilde{A}B\tilde{C}\tilde{D}$ تصویر چهارضلعی محدب $ABCD$ تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به C, B و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



جهت حرکت در بازتاب شده‌ی این شکل ($A\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$) خلاف جهت عقربه‌های ساعت است بازتاب جهت شکل را حفظ می‌کند.

۳- در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله‌ی m از آن قرار دارد و مثلث $\tilde{A}B\tilde{C}$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $C''B''A''$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.



الف) نشان دهید $AA'' = 2m$

$$\begin{aligned} AA'' &= AD + DA + \tilde{A}\tilde{D} + \tilde{D}A'' \\ &\{ AD = D\tilde{A} \Rightarrow AD + \tilde{D}A'' = m \\ &\tilde{A}\tilde{D} = \tilde{D}A'' \\ &AA'' = m + m = 2m \end{aligned}$$

ب) اندازه‌ی BB'' و CC'' چقدر است؟

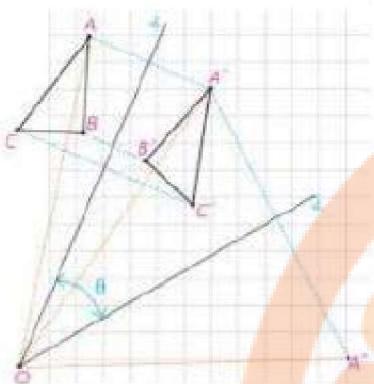
طبق اثبات قسمت الف مقدار BB'' و CC'' هم برابر $2m$ است.

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تلاشی در مسیر موفقیت

انتقال تصویر یک شکل، انتقال آن شکل با برداری به اندازه i ۲ برابر فاصله i خط بازتاب است.

۴. در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث ABC بازتاب مثلث $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.



$$\widehat{AOA''} = 2\theta$$

$$\widehat{AOA''} = \widehat{AOD} + \widehat{DOA} + \widehat{AOE} + \widehat{EOA''}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AOD} = \widehat{DOA} \\ \widehat{EOA''} = \widehat{AOE} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{EOA''} = 0 \Rightarrow \widehat{AOA''} = 2\theta$$

ب) اندازه $\widehat{BOB''}$ و $\widehat{COC''}$ چقدر است؟

طبق اثبات قسمت الف $\widehat{BOB''}$ و $\widehat{COC''}$ هم برابر 2θ است.

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه-

ای می‌گیرید؟

دوران حول مرکز O با زاویه 2θ و نتیجه می‌گیریم که اگر محور دو بازتاب متقاطع باشند ترکیب آنها یک دوران است.

سوال عن صفحه ۴۵

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k ، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی تیم خط OM نقطه M' را چنان می‌بابیم که $OM' = k \cdot OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطه M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطه O بین نقاط M و M' باشد و $OM' = |k| \cdot OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k و نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k است، بنابراین داریم:

$$k > 0 \Rightarrow OM' = k \cdot OM \xrightarrow{-k} \frac{1}{k} \cdot OM' = OM$$

$$k < 0 \Rightarrow OM' = |k| \cdot OM \xrightarrow{-|k|} \frac{1}{|k|} \cdot OM' = OM$$

در نتیجه نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت $\frac{1}{k}$ است.

تلاشی در مسیر موفقیت

۱- این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.

الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

بنابراین نقاط A و A' در یک طرف نقطه O قرار دارند، بنابراین:

$k > 1$

$$OA' = k \cdot OA \Rightarrow k = \frac{OA'}{OA} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow k = 3$$

$$OC' = k \cdot OC \Rightarrow k = \frac{OC'}{OC} = \frac{1+}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

ب) آیا تجانس طولپایاست؟ چرا؟

خیر، زیرا اندازه پاره خط تغییر می‌کند، بنابراین طولپای است.

پ) در این شکل‌ها، طول هر پاره خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید.

به چه نتیجه‌ای می‌توان رسید؟

در شکل مربع: $D'A = 3DA$ و $A'B' = 3AB$ و $B'C' = 3BC$ و $C'D' = 3CD$ بنا براین: طول تصویر هر پاره خط ۳ برابر شده

است و ۳ در واقع نسبت تجانس است:

$$\frac{A'B'C'D' \text{ محیط}}{ABCD \text{ محیط}} = \frac{A'B' + B'C' + C'D' + D'A'}{AB + BC + CD + DA} = \frac{3(AB + BC + CD + DA)}{AB + BC + CD + DA} = 3 \quad \text{نسبت تجانس}$$

در شکل مثلث:

$$A'B' = 3AB \quad \text{و} \quad B'C' = 3BC \quad \text{و} \quad A'C' = 3AC$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (3A)^2 + (3B)^2 = 9A^2 + 9B^2 = 18 \Rightarrow AC = \sqrt{18}$$

$$\text{و} \quad (A'C')^2 = (A'B')^2 + (B'C')^2 = (3A)^2 + (3B)^2 = 9A^2 + 9B^2 = 18 \Rightarrow A'C' = \sqrt{18}$$

بنابراین طول تصویر هر پاره خط ۳ برابر شده است و ۳ در واقع نسبت تجانس است.

$$\frac{A'B'C' \text{ محیط مثلث}}{ABC \text{ محیط مثلث}} = 3$$

تلashی در مسیر موفقیت

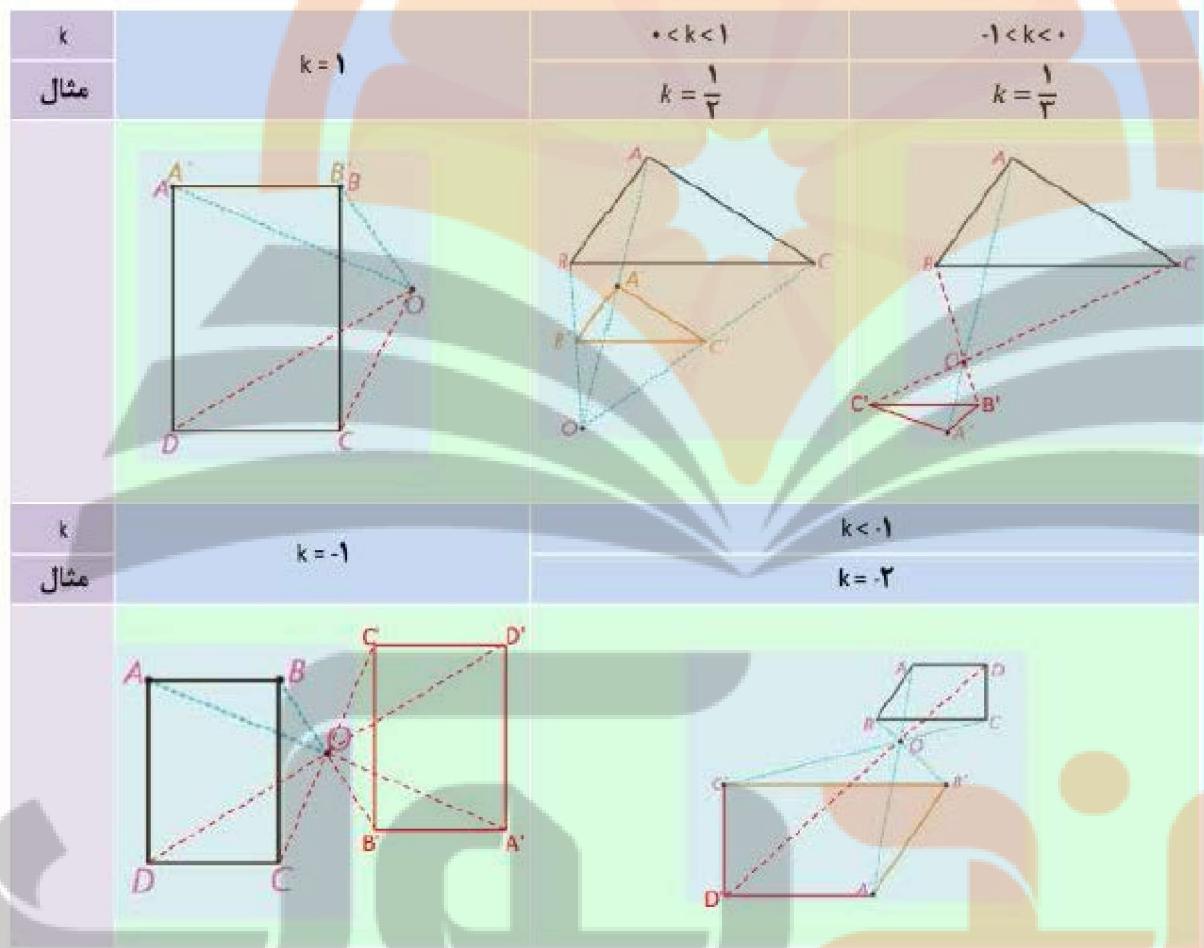
ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

$$\frac{S_{ABDCr}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4 \times 6}{\frac{1}{2} \times 2 \times 3} = 12 = (2)^2 \quad \text{و} \quad \frac{S_{ABDCrD'}}{S_{ABCD}} = \frac{(6)^2}{(2)^2} = \frac{36}{4} = 9 = (3)^2$$

بنابراین مساحت تصویر یک شکل نسبت به مساحت آن شکل برابر با توان دوم نسبت تجانس یعنی k^2 است.

۲- در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به عبارتی: $1 < k < +\infty$ حال مسئله را برای مقدارهای مختلف k بررسی می‌کنیم.

الف) در هر حالت مراحل باقی‌مانده را کامل کنید.



تلashی در مسیر موفقیت

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید:

مساحت شکل حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	اندازه‌ی زاویه حفظ می‌شود.	طولپاست			
نادرست	درست	درست	درست	درست	$k > 1$	$k > 0$	تجانس
درست	درست	درست	درست	درست	$k = 1$		
نادرست	درست	درست	درست	درست	$0 < k < 1$		
نادرست	درست	درست	درست	درست	$-1 < k < 0$	$k < -1$	
درست	درست	درست	درست	درست	$k = -1$		
نادرست	درست	درست	درست	درست	$k < -1$		

پ) شرط اینکه تجانس طولپا باشد، این است که $|k| = 1$ یا $k = -1$ باشد. در واقع $|k| = 1$ باشد.

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن تغییر می‌کند، یعنی خطوط AA' , BB' و ... نسبت به هم چه وضعی دارند؟

همه این خطوط در نقطه ۰ یعنی مرکز تجانس هم‌سرند.

در تجانس به مرکز ۰ و نسبت k :

اگر $0 < k$ تجانس را، تجانس مستقیم می‌نامیم.

اگر $0 < k$ تجانس را تجانس معکوس می‌نامیم.

اگر $1 < |k|$ تصویر شکل کوچک‌تر می‌شود و آن را انقباض می‌نامیم.

اگر $|k| > 1$ تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را انبساط می‌نامیم.

تلاشی در مسیر موفقیت

می خواهیم نشان دهیم تجانس، شبیب خط را حفظ می کند. برای این منظور، تجانس D ، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می گیریم؛ دو حالت اتفاق می افتد:

الف) نقطه‌ی O روی خط AB است.

حل: در این حالت بدینهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B ، روی خط AB واقع می شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شبیب خط تغییری نمی کند.

ب) نقطه‌ی O غیرواقع بر خط AB است.

حل: در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم:

$$\begin{cases} OA' = k \cdot OA \\ OB' = k \cdot OB \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$$

$$\Rightarrow AB \parallel A'B' \quad (\text{چرا})$$

بنابراین به عکس قضیه تالس

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی‌اند و شبیب دو خط، برابر است؛ بنابراین:

قضیه: تجانس، شبیب خط را حفظ می کند.

دو مین فعالیت صفحه ۴۸

می خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازه‌ی زاویه را حفظ می کند.

تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه \widehat{ABC} را در نظر می گیریم. مجانس این زاویه، یعنی زاویه‌ی $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می کنیم.

به کمک قضیه قیل و شکل داده شده، ثابت کنید: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

با توجه به قضیه قیل داریم $AB \parallel A'B'$ و با توجه به شکل اگر خط OB' مورب

تلاشی در مسیر موفقیت

باشد بنابراین قضیه خطوط موازی داریم (۱) و همین طور $OB' \parallel BC'$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد (بنابراین

قضیه خطوط موازی (۱) و $\widehat{B'C} = \widehat{B'P}$. بنابراین از جمع (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

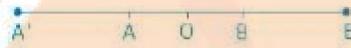
$$\widehat{B_1} + \widehat{B'_1} = \widehat{B'}_1 + \widehat{B''}_1 \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

کار در کلاس صفحه ۴۹

۱- الف) فرض کنید پاره خط $A'B'$ مجانس پاره خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد؛ نشان دهید:

(۱) اگر نقطه O روی پاره خط AB قرار داشته باشد و $k > 0$ باشد آنگاه:

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{OA' = k \cdot OA \text{ و } OB' = k \cdot OB} A'B' = k \cdot OA + k \cdot OB = k(OA + OB) = k \cdot AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



(۲) اگر نقطه O روی پاره خط AB قرار داشته باشد و $k < 0$ باشد؛ آنگاه:

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{OA' = |k| \cdot OA \text{ و } OB' = |k| \cdot OB} |k| \cdot OA + |k| \cdot OB = |k|(OA + OB) = |k| \cdot AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



(۳) اگر نقطه O روی امتداد پاره خط AB قرار داشته باشد و $k > 0$ باشد؛ آنگاه:

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{OA' = k \cdot OA \text{ و } OB' = k \cdot OB} k \cdot OA - k \cdot OB = k(OA - OB) = k \cdot AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



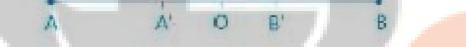
(۴) اگر نقطه O روی امتداد پاره خط AB قرار داشته باشد و $k < 0$ باشد؛ آنگاه:

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{OA' = |k| \cdot OA \text{ و } OB' = |k| \cdot OB} |k| \cdot OA - |k| \cdot OB = |k|(OA - OB) = |k| \cdot AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



(۵) اگر نقطه O روی پاره خط AB قرار داشته باشد و $-k < k < 1$ باشد؛ آنگاه:

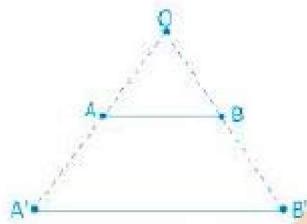
$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{OA' = k \cdot OA \text{ و } OB' = k \cdot OB} k \cdot OA + k \cdot OB = k(OA + OB) = k \cdot AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



تلاشی در مسیر موفقیت

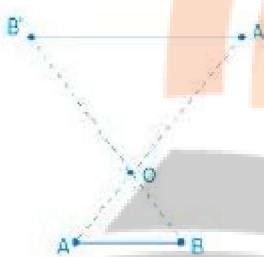
۶) اگر نقطه A روی پاره خط AB قرار نداشته باشد و $k > 0$ باشد، آنگاه:

$$\frac{OA'}{OB'} = k, OA \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \quad \text{عکس قضیه تالس} \quad AB \parallel A'B' \cdot \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$



۷) اگر نقطه O روی پاره خط AB قرار نداشته باشد و $k < 0$ باشد؛ آنگاه:

$$\frac{OA'}{OB'} = k, OA \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \quad \text{بنایه قضایی تشیه مشتمل} \quad \triangle AOB \sim \triangle A'OB' \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$



ب) اگر n ضلعی A'_1, A'_2, \dots, A'_n مجازس A_1, A_2, \dots, A_n باشد، نشان دهید این دو n ضلعی با هم متشابه‌اند.

فرض می‌کنیم A_1, A_2, \dots, A_n یک «ضلعی باشد و» «ضلعی A'_1, A'_2, \dots, A'_n مجازس آن به مرکز تجانس O و نسبت تجانس k باشد؛ آنگاه بنایه تعریف تجانس داریم:

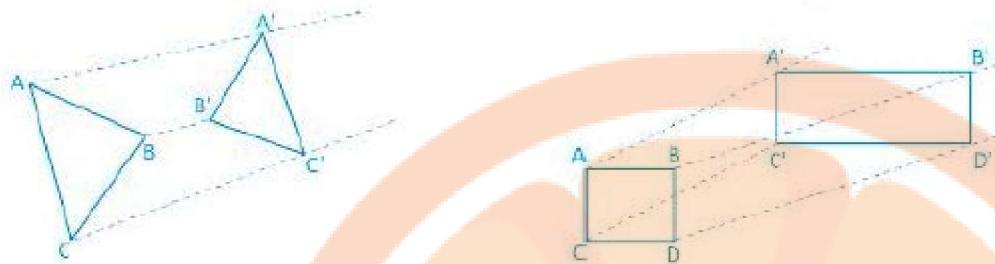
$$\left\{ \begin{array}{l} OA'_1 = |k| \cdot OA_1 \\ OA'_2 = |k| \cdot OA_2 \\ \vdots \\ OA'_n = |k| \cdot OA_n \end{array} \right. \Rightarrow \frac{OA'_1}{OA_1} = \frac{OA'_2}{OA_2} = \dots = \frac{OA'_n}{OA_n} = |k|$$

بنایه سومین قضیه متشابه، چون همه اضلاع متناسب هستند، بنابراین دو n ضلعی متشابه هستند.

۲- با توجه به ویژگی‌های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

تلاشی در مسیر موفقیت

با توجه به فعالیت (صفحه ۴۷) می‌دانیم که خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می‌کند در مرکز تجانس یعنی ۰ همسرستند بنابراین کافی است دو شکل مشابه رسم کنیم که وقتی هر نقطه را به تصویر آن وصل می‌کنیم هرسنگوند. به این ترتیب مرکز تجانس وجود ندارد و در نتیجه تجانس نیز وجود نخواهد داشت.



فعالیت صفحه ۴۹

پیش از این دیدیم که اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی $A' = A$ است و داریم $T(A) = A' = A$. این نقاط را نقاط ثابت تبدیل نامیدیم. اما برخی از تبدیل‌ها، هر نقطه‌ای صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند؛ چنین تبدیل‌هایی را تبدیل همانی می‌نامیم.

تعریف: تبدیل T را تبدیل همانی گوییم. هرگاه به ازای هر نقطه‌ی P از صفحه‌ی A داشته باشیم $T(P) = P$

معمولًاً تبدیل‌های همانی را با انمایش می‌دهند؛ پس $T(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب فرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A ، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

اگر بردار انتقال برابر با بردار صفر باشد آنگاه تبدیل انتقال همانی است.

اگر زاویه دوران صفر درجه یا 360° درجه باشد آنگاه تبدیل دوران همانی است.

اگر $A = B$ باشد تجانس تبدیل همانی است.

ب) آیا تبدیل همانی طولپا است؟

بله، چون هر نقطه را به خود آن نقطه تصویر می‌کند، بنابراین تبدیل همانی، طولپاست. اگر $A \neq B$ دو نقطه در صفحه

باشند، آنگاه تحت یک تبدیل همانی داریم: $T(A) = A, T(B) = B \Rightarrow AB = A'B$

تلاشی در مسیر موفقیت

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱- انتقال غیرهمانی: خیر، نقطه ثابت ندارد. چون هر نقطه تحت یک بردار غیر صفر انتقال داده می‌شود، بنابراین به روی خودش منطبق نمی‌شود.

۲- دوران غیرهمانی: در صورتی که نقطه مورد نظر روی مرکز دوران باشد تحت هر دورانی ثابت می‌ماند. بنابراین مرکز دوران، نقطه ثابت دوران غیرهمانی است.

۳- تجانس غیرهمانی: در صورتیکه نقطه مورد نظر روی مرکز تجانس باشد تصویر آن بر روی خودش منطبق می‌شود بنابراین مرکز تجانس نقطه ثابت، تجانس غیرهمانی است.

کار در کلاس صفحه ۵۰

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

مساحت شکل را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.	طول پاره خط را حفظ می‌کند.	
درست	نادرست	نادرست	درست	درست	بازتاب
درست	درست	درست	درست	درست	انتقال
درست	درست	نادرست	درست	درست	دوران
نادرست	درست	درست	درست	نادرست	تجانس

تمرین صفحه ۵۰

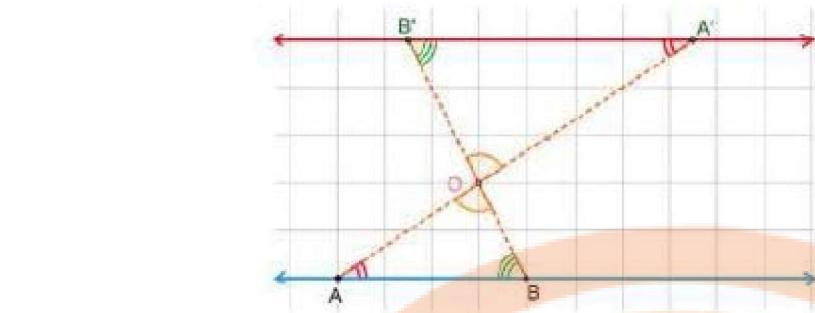
۱. در تجانسی با نسبت $+K$ و مرکز تجانس ۰ نشان دهید:

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

حالاتی مختلف در کار در کلاس صفحه ۴۸ بررسی شده است و به عنوان مثال، در حالت ۱ = K دو خط روی هم بیگر افتاده یعنی اینکه شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

تلاشی در مسیر موفقیت

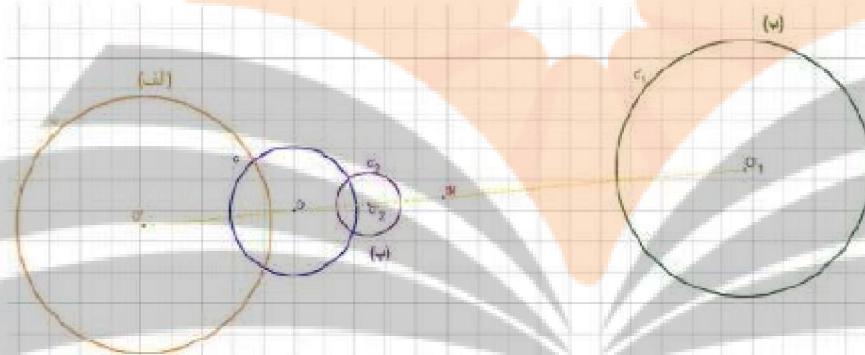


۲. دایره $C(0, R)$ و نقطه‌ی M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه‌ی M در هر حالت رسم کنید.

$$K = 2$$

$$K = -2$$

$$K = \frac{1}{r}$$



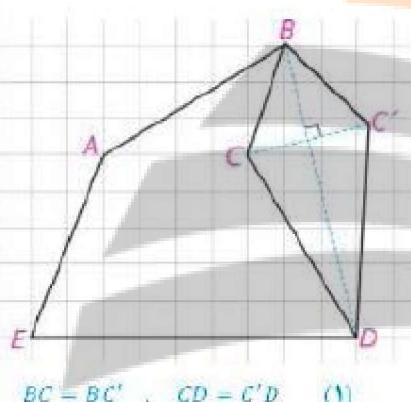
پژوهشگاه تلاشی در مسیر موفقیت

۱- توضیح دهید که بازتاب به حل مسئله چه کمکی کرده است؟

شکل های A و A' نسبت به محور بازتاب یعنی خط ℓ قرینه هستند، بنابراین همان اندازه اند. همچنین شکل های B و B' نسبت به محور بازتاب یعنی خط ℓ' قرینه اند. پس همان اندازه اند. در نتیجه به یک نفر شکل A و B و به نفر دیگر شکل A' و B' را می دهیم.

۲- برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چند ضلعی $ABCDE$ داریم که دور آن را حصار گشیده ایم. حال می خواهیم با ثابت نگه داشتن محیط و ثابت نگه داشتن تعداد اضلاع چند ضلعی، بدین اینکه اندازه حصار کشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم. به کمک تصویر رو برو توضیح دهید که این عمل را چگونه می توان انجام داد.

اگر نقطه ℓ را به D وصل کنیم و آن را به عنوان محور بازتاب در نظر می گیریم، حال تصویر نقاط B و C و D را نسبت به پاره خط BD بدست می آوریم. می دانیم که تصویر نقاط B و C بر روی خودشان منطبق می شود ولی تصویر نقطه D ، نقطه C' است.



چرا محیط چند ضلعی $ABCDE$ با محیط چند ضلعی $A'B'C'D'E'$ یکی است؟

می دانیم که تبدیل بازتاب، طولیاست بنابراین داریم:

$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA \stackrel{(1)}{\Rightarrow} = AB + BC' + C'D + DE + EA = P_{A'B'C'D'E'} \Rightarrow P_{ABCDE} = P_{A'B'C'D'E'}$$

لذت‌بخشی در مسیر موفقیت

سوال متن صفحه ۵۳

۱- برای هر نقطه‌ی دلخواه دیگری نظیر M_1 داریم $M_1A = M_1A'$ (و به

همین ترتیب $AM = A'M$: چرا؟

چون خط d محور بازتاب است، بنابراین عمودمنصف پاره خط $A'A'$ است. نقاط M و M_1 روی خط d قرار دارند، بنابراین خاصیت عمودمنصف $AM_1 = A'M_1$ و $AM = A'M$ پاره خط AM به یک فاصله است.

۲- در مثلث $A'M_1B$ داریم $A'M_1 + M_1B > A'B$: چرا؟

بنابراین قضیه تامساوی مثلث، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است: بنابراین:

$$A'M_1 + M_1B > A'B$$

از تساوی $A'B = A'M + MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.

$$\begin{aligned} A'B &= A'M + MB \xrightarrow{A'M = AM \text{ (۱)}} A'B = AM + MB \\ &\Rightarrow A'B < A'M_1 + M_1B \quad (۲) \\ &\Rightarrow AM + MB < A'M_1 + M_1B \end{aligned}$$

بنابراین M_1 دلخواه و $AM + MB$ بنای ادعای هرون کوتاهترین مسیر ممکن است:

خط d محور بازتاب است پس عمودمنصف پاره خط AA' است. نقطه M روی خط d قرار دارد بنابراین $MA = MA'$ در نتیجه مثلث AMA' متساوی الساقین است پس $\angle A$ بمساواز زاویه A' است بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= \tilde{M}_2 \\ \tilde{M}_2 &= \tilde{M}_1 \quad \text{متقابل به رأس} \Rightarrow \tilde{M}_1 = \tilde{M}_2 \end{aligned}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

حل صفحه ۵۴

کافی است نشان دهیم این مسیر از تمام مسیرهای دیگر کوتاه‌تر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که طول این مسیر با طول پاره خط A_1B برابر است.

(۱)

$$\begin{cases} A_1B_1 = AB_1 \Rightarrow AB_1 + B_1B_1 = A_1B_1 \\ A_1B_1 = A_1B_1 \Rightarrow A_1B_1 + B_1B = A_1B \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB_1 + B_1B_1 + B_1B = A_1B$$

(۲) حال مسیر دلخواه دیگری مانند $AMNB$ را در نظر می‌گیریم؛ داریم:

$$AM = A_1M \Rightarrow AM + MN = A_1N$$

$$A_1N = NA_1 \Rightarrow \underbrace{AM + MN + NB}_{A_1N} = A_1N + NB$$

حال با توجه به مثلث BNA_1 داریم:

طول مسیر اول \triangleright طول مسیر دوم

حل صفحه ۵۵

حل: مسئله را در چند مرحله حل می‌کنیم.

۱- اگر جاده‌ی ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر $CD=0$.

این مسئله به کدام یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده‌اید؟

شبیه به مسئله هرون، سردی که می‌خواست از رودخانه آب بردارد و به استبل
پیرد.

۲- با توجه به شرایط مسئله، مسیر موردنظر، باید مسبری به شکل

مسیر $ACDB$ باشد؛ اما:

(چرا؟) طول مسیر $ACB'B$ = طول مسیر $ACDB$

بنابراین:

تلashی در مسیر موفقیت

چون نقطه C تحت بردار انتقال به طول ۴ به نقطه D و نقطه B' نیز تحت همان بردار به B منتقل شده است. با توجه به ویژگی انتقال چهارضلعی $CB'BD$ متوازی الاضلاع است. بنابراین: $CB' = BB'$ و $CD = DB$ (۱)

$$ACDB = AC + CD + DB \stackrel{(1)}{=} AC + CB' + B'B = ACB'B$$

۳- پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن به شکل $ACDB$ مسیر را به گونه‌ای انتخاب کنیم که طول ACB' کوتاه‌ترین طول ممکن باشد.

۴- به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل رویه‌رو توضیح دهید که رسم کوتاه‌ترین مسیر $ACDB$ جگone است.

ابتدا نقطه B را تحت بردار انتقال به طول ۴ موازی رودخانه و به سمت چپ به نقطه B' انتقال می‌دهیم. حال همانند مسئله هرون بازتاب نقطه A را نسبت به خط کنار رودخانه بدست می‌آوریم یعنی A' . بعد از A' به B' وصل می‌کنیم. خط $A'B'$ خط کنار رودخانه را در نقطه C قطع می‌کند از نقطه C موازی خط رودخانه و به طول ۴ به سمت راست حرکت می‌کنیم تا نقطه B به دست آید. بنابراین $ACB' + 4$ طول مسیر = طول مسیر $ACDB$.

کار در کلاس صفحه ۵۵

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد. محل احداث پل را کجا در نظر بگیری که مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

ابتدا تصویر نقطه B را بدست می‌آوریم. B را تحت برداری مساوی عمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می‌دهیم. را به A وصل می‌کنیم نقطه برخورد AB' با خط کنار رودخانه را M نامیم. از M بر رودخانه عمود می‌کنیم و N را بدست می‌آوریم. بنابراین $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر است. بنایه قسمت پ از مسئله قبل و با توجه به ویژگی تبدیل انتقال چهارضلعی $MNBB'$ موازی الاضلاع است و داریم:

تلashی در مسیر موفقیت

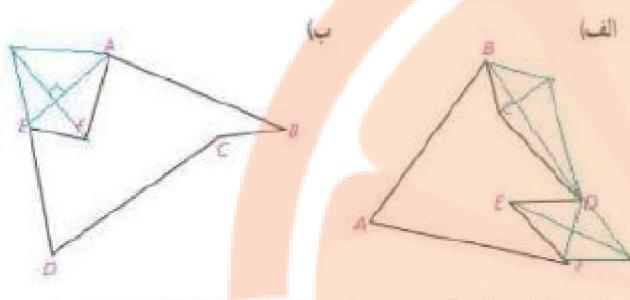
$$AMB'B \text{ مسیر} = AM + MB' + BB' \xrightarrow{MB'=NR \quad MN=BR'}$$

$$AMB'B \text{ مسیر} = AM + NB + MN = AMNB \text{ مسیر}$$

$$\Rightarrow \text{مسیر } AMB'B = AMNB \text{ مسیر}$$

تمرین صفحه ۵۶

۱. دور زمین هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟



۲. می خواهیم کنار رودخانه ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله های A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله های M را در جه نقطه های از ساحل بسازیم که قایق ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه ترین مسیر را طی کنند؟

با توجه به شکل عرض رودخانه را در طول مسیر ثابت درنظر می گیریم.
بازتاب نقاط A و B را نسبت به عرض رودخانه بدست می آوریم یعنی A و B حال $\hat{\theta}$ را به A وصل می کنیم و نقطه برخورد با ساحل را M می نامیم. اگر A را به B وصل کنیم خواهیم دید که از M میگذرد. با اینکه از متنی هر دو نتیجه می گیریم که مسیر MABM کوتاه ترین مسیر است.

- ۳- سه خط دو به دو ناموازی a و a' و a'' در صفحه مفروض اند. پاره خطی به طول ۵ سانتیمتر رسم کنید که دو سر آن روی a و a' و موازی a'' باشد.

ابتدا پاره خطی دلخواه روی a در نظر می گیریم و آن را AB می نامیم. خط a را تحت بردار \overline{AB} انتقال می دهیم تا خط a' به دست آید. حال نقطه برخورد خط a و a' را A' می نامیم. از A' خطی موازی a'' رسم می کنیم تا خط a را در نقطه A'' قطع کند، پاره خط EF جواب مورد نظر است.

تلashی در مسیر موفقیت

۴- فرض کنید G محل برخورد میانه های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث C'A'B' مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $\frac{1}{3}$ = K باشد.

الف) جایگاه رأس های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟ چون تجانس به مرکز G است بنابراین $GA' = \frac{1}{3} GA$ و همچنین G بین A' و A است، برای B' و C' نیز به همین ترتیب است. بنابراین رأس های A' و B' و C' روی اضلاع مثلث ABC قرار دارند.

ب) مساحت مثلث C'A'B' چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

مساحت تصویر یک شکل نسبت به مساحت آن شکل برابر توان دوم نسبت تجانس است بنابراین داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$$

لُجْلَجْ بِرْدْ

تلاشی در مسیر موفقیت

فعالیت ۱ صفحه ۶۲

در کتاب ریاضی ۱ (پایه دهم)، با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، جاهای خالی را پر کنید.

$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

$$\sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = 1 \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a$$



بنابراین داریم:

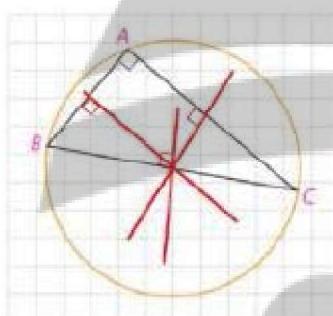
در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر است با اندازه‌ی وتر مثلث.

فعالیت ۲ صفحه ۶۳

در کتاب هندسه ۱ دیدیم که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همسرند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است. دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟

روش اول:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، محل برخورد عمودمنصف‌ها وسط وتر است. بنابراین صرکر این دایره وسط وتر است. و چون وتر BC از مرکز دایره عبور کرده پس، قطر دایره است.



روش دوم:

چون $\angle BAC = 90^\circ$ ، زاویه محاطی است بنابراین کمان BC برابر 180° است. یعنی دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده است بنابراین وتر BC قطر دایره است.

با توجه به نتیجه فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی روبرو به آن ضلع برابر است با اندازه‌ی **قطر** دایره‌ی محیطی مثلث.

تلاشی در مسیر موفقیت

مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) و دایره محيطی آن به مرکز O را در نظر می‌گيريم. قطر BD دا دسم، و D به A و C وصل می‌کنيم.

۱- زوایای \hat{C} و \hat{D} چرا با هم برابرند؟

چون هر دو زاویه محاطی و روپرتویه کمان AB هستند بنابراین برابرند.
اندازه‌ی آنها برابر است با نصف کمان AB .

۲- چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

چون زاویه محاطی $B\hat{A}D$ روپرتویه قطر دایره است. بنابراین داريم:

$$B\hat{A}D = \frac{B\hat{C}D}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داريم:

$\therefore R = BD$ شعاع دایره محيطی است و

$$\sin C = \sin D \quad \text{و} \quad \sin D = \frac{C}{BD} \Rightarrow \sin C = \frac{C}{R} \Rightarrow \frac{C}{\sin C} = R$$

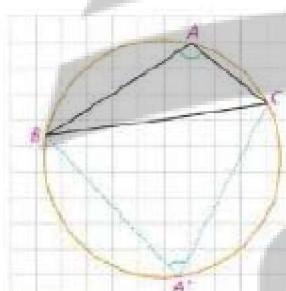
۴- به طور مشابه خواهيم داشت:

$$\frac{a}{\sin A} = R \quad \text{و} \quad \frac{b}{\sin B} = R$$

۵- حال مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) را در نظر بگيريد. نقطه‌ی داخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می‌کنيم.

زوایای \hat{A} و \hat{A}' نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

مکمل‌اند. زیرا:



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \frac{B\hat{A}'C}{r} \\ \hat{A}' = \frac{B\hat{A}C}{r} \end{array} \right. \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = \frac{B\hat{A}'C}{r} + \frac{B\hat{A}C}{r} = \frac{B\hat{A}'C + B\hat{A}C}{r} = \frac{360^\circ}{r} = 180^\circ$$

$\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ بنابراین \hat{A}' زاویه‌ی حاده است.

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانيد، جاهای خالی را پر کنيد:

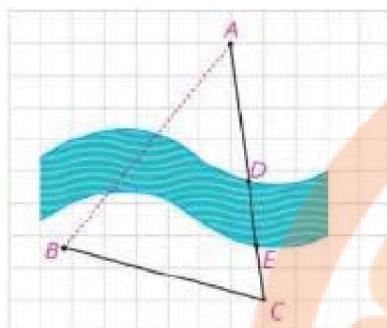
در مثلث $A'BC$ طبق نتیجه قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم:

تلاشی در مسیر موفقیت

$$\frac{a}{\sin A'} = r R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = r R$$

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی روبرو به آن برابر است با طول قطر دایره محیطی مثلث.

کار در گلاس صفحه ۶۵



می‌خواهیم روی یک رودخانه‌ی عمیق بین دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به دست بیاوریم؛ اما امکان اندازه‌گیری مستقیم (به دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطه A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه‌یاب (تندولیت) زاویه‌ی دید AC از نقطه B (B̂) و زاویه‌ی دید C از A (Ĉ) را اندازه‌گیریم. به صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای B̂ و Ĉ می‌توان فاصله AB را به دست آورد:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180^\circ - (B + C))} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(B + C)}$$

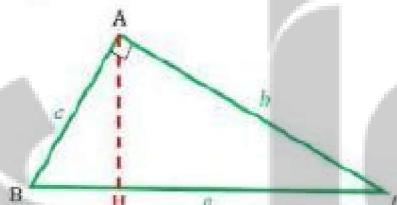
اگر $BC = 3 \text{ km}$ و $C = 60^\circ$ و $B = 70^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به دست آورید.

$$AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(B + C)} = \frac{3 \times \sin 60^\circ}{\sin 130^\circ} = \frac{3 \times 0.86}{0.76} \approx 3.99$$

تمرین صفحه ۶۵

۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) $AH = h_a$ (با ارتفاع AH داریم):

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$$



با توجه به مساحت مثلث داریم:

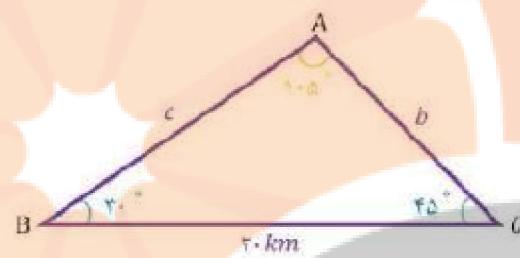
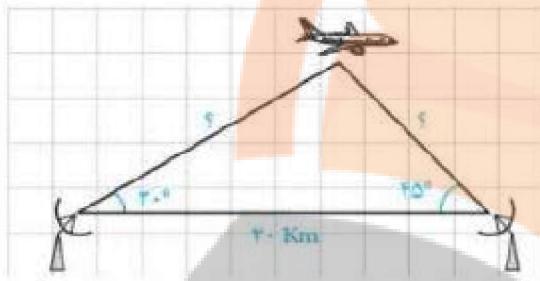
تلاشی در مسیر موفقیت

$$\begin{cases} S = \frac{1}{r} bc \\ S = \frac{1}{2} ah_a \end{cases} \Rightarrow bc = ah_a \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می رسانیم}} (bc)^r = (ah_a)^r \Rightarrow b^r c^r = a^r h_a^r$$

$$\xrightarrow{a^r = b^r + c^r} b^r c^r = (b^r + c^r) h_a^r \Rightarrow b^r c^r = b^r h_a^r + c^r h_a^r$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم}} \frac{h_a^r c^r}{b^r c^r h_a^r} = \frac{b^r h_a^r}{b^r c^r h_a^r} + \frac{c^r h_a^r}{b^r c^r h_a^r} \Rightarrow \frac{1}{h_a^r} = \frac{1}{c^r} + \frac{1}{b^r}$$

۲- دو ایستگاه رادار، که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع اند، هوایپیمایی را با زاویدهای 30° و 45° درجه رصد کرده‌اند.
فاصله‌ی هوایپما را از دو ایستگاه به دست آورید.



$$105^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 10^\circ$$

$$\frac{20}{\sin 10^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{\sin 10^\circ} = \frac{c}{\sin 10^\circ} \Rightarrow c = 14/\sqrt{3} \\ \frac{20}{\sin 10^\circ} = \frac{a}{\sin 45^\circ} \Rightarrow a = 10/\sqrt{3} \end{cases}$$

دانشجویی

تلاشی در مسیر موفقیت

درس دوم: قضیه کسینوس‌ها

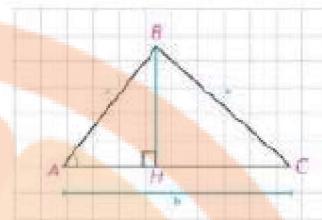
فعالیت ۱ صفحه ۶۶

در مثلث ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم. با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث‌های قائم الزاویه، جاهای خالی را پر کنید:

$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \times \cos A \quad \text{و} \quad CH = b - AH = b - c \cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \times \sin A$$

$$\Delta BHC : BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2$$



حال به کمک اتحادهای جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A$$

$$a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \underbrace{\left(\sin^2 A + \cos^2 A \right)}_{1} - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A$$

اگر $\hat{A} > 90^\circ$ در مثلث ABC ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم. اگر \hat{A}_1 زاویه خارجی رأس A باشد

با توجه به اینکه $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$ داریم:

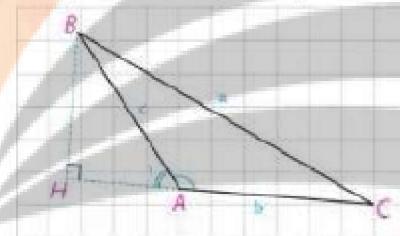
نیز با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت: $\cos A_1 = -\cos A$ و $\sin A_1 = \sin A$

$$\cos A_1 = \frac{AH}{c} \quad \text{و} \quad \sin A_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow AH = c \times -\cos A \quad \text{و}$$

$$BH = c \times \sin A \quad \text{و} \quad CH = b + AH = b - c \cos A$$

$$\Delta BHC : BC^2 = BH^2 + CH^2$$

$$\Rightarrow a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2$$



و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A$$

$$a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 \underbrace{\left(\sin^2 A + \cos^2 A \right)}_{1} + b^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \times \cos A$$

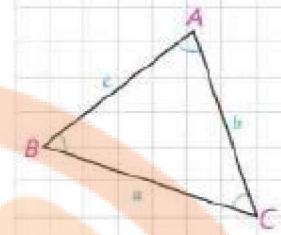
سوال: در حالتی که زاویه A قائم باشد. این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos 90^\circ = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

تلاشی در مسیر موفقیت

قضیه‌ی کسینوس‌ها : در هر مثلث، مربع اندازه‌ی هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه‌ی آن دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین آنها:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$



کار در کلاس صفحه ۶۷

در مثلث $\hat{A} = 60^\circ$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $AB = 2\sqrt{2}$. ABC را به کمک قضیه کسینوس‌ها به دست آورید.

۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس‌ها به دست آورید.

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos A \\ BC^2 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2\sqrt{2}) \cos 60^\circ \\ BC^2 &= 6 + 2\sqrt{12} + 2 + 8 - 2\sqrt{12} - 4 = 12 \\ \Rightarrow BC^2 &= 12 \quad \text{و} \quad BC = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

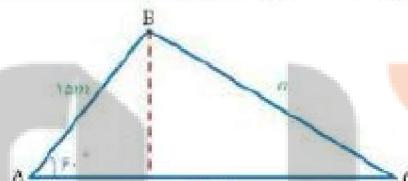
۲- اندازه \hat{C} را به کمک قضیه سینوس‌ها به دست آورید و از آنجا اندازه \hat{B} را هم بیابید.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \hat{C} = 45^\circ \quad (\sin C = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 75^\circ$$

تمرین صفحه ۶۷

۱- یک درخت کج از نقطه‌ی A روی زمین، که در فاصله‌ی ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه‌ی 60° دیده می‌شود. اگر فاصله‌ی A تا پای درخت 20 متر باشد. مطلوب است:



الف) طول درخت

تلاشی در مسیر موفقیت

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 20^2 + 15^2 - 2(15)(20) \cos 60^\circ = 400 + 225 - 300 = 325$$

$$\Rightarrow a^2 = 325 \Rightarrow a = 5\sqrt{13}$$

ب) زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{15}{\sin C} = \frac{5\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \approx 0.72$$

$$\Rightarrow C = 42^\circ$$

پ) فاصله نوک درخت از زمین

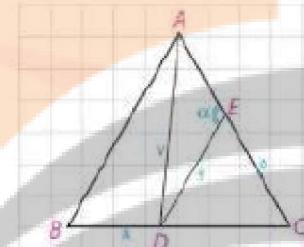
$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{15} \Rightarrow BH = \frac{15\sqrt{13}}{2} \approx 12.99$$

۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع A واحد، نقطه‌ی D ، که به فاصله‌ی ۲ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$ نقطه‌ی E ، که به فاصله‌ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟

$$y^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \cos 60^\circ \Rightarrow 49 = 64 + x^2 - 8x$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 64 - 49 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & CD > BD \\ x = 5 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = BD = 3 \\ CD = 5 \end{cases}$$



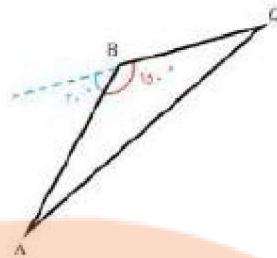
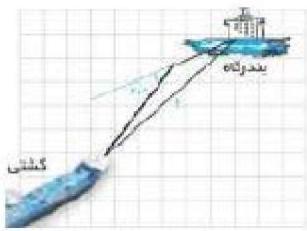
بنابراین $CD = CE = 5$ ، یعنی مثلث CED متساوی‌الساقین است و چون $\hat{C} = 60^\circ$ پس $\hat{E} = \hat{D} = 60^\circ$ بنابراین $\hat{D} = 60^\circ$ و نتیجه می‌گیریم مثلث CED متساوی‌الاضلاع است، پس $ED = 5$. حال زاویه α را مشخص می‌کنیم:

$$\alpha = 180^\circ - \hat{DEC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

(روش دوم برای محاسبه زاویه α : زاویه α یک زاویه خارجی برای مثلث CED است پس $\alpha = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$)

۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت 60 کیلومتر در ساعت در جهت ایست و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت 40 کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

تلاشی در مسیر موفقیت

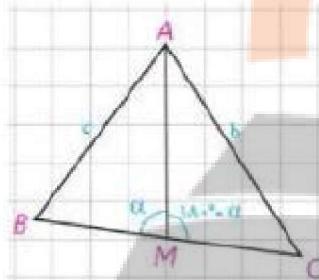


با تعریف سرعت می‌توان مسافت را محاسبه کرد. اگر سرعت را در مدت زمان طی شده ضرب کنیم، مسافت طی شده به دست می‌آید. پس داریم:

$$AC = 6 \times 1 = 6 \text{ km} \quad , \quad CB = 4 \times -/4 = 2 \text{ km}$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AC \times CB \times \cos 15^\circ = 6^2 + 2^2 - 2(6)(2) \cos 15^\circ$$

$$AB^2 = 36 + 4 - 24 \cdot (-/-866) = 6.78/4 \Rightarrow AB \approx 77/96$$



- در مثلث ABC، میانه AM را رسم کرد هایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$) با نوشتن قضیه کسینوس ها در دو مثلث AMC و AMB ، a^2 ، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو نساوی حاصل، درستی نساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{4} \quad (\text{قضیه میانه ها})$$

$$\Delta AMB : c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)(AM) \cos \alpha \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a(AM) \cos \alpha \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta AMC : b^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)(AM) \cos(180^\circ - \alpha) \Rightarrow b^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + AM^2 + a(AM) \cos \alpha \quad (2) \end{aligned}$$

از جمع (1) و (2) داریم:

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{4} + 2AM^2$$

در حالت خاص $a = 6$ ، $b = 4$ و $c = 5$. طول میانه AM را به دست آورید.

$$b = 6, c = 5, a = 8$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{4} + 2AM^2 \Rightarrow 6^2 + 5^2 = \frac{8^2}{4} + 2AM^2 \Rightarrow 52 = \frac{64}{4} + 2AM^2$$

تلاشی در مسیر موفقیت

$$\Rightarrow \gamma AM^r = 52 - 32 = 20 \Rightarrow AM^r = \frac{20}{2} = 10$$

$$\Rightarrow AM^r = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

۵- در مثلث ABC، نقطه‌ی Dلخواه روی BC مفروض است. به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC و استوارت (قضیه‌ی استوارت)

درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^r \cdot DC + AC^r \cdot DB = AD^r \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ADB داریم:

$$AB^r = AD^r + DB^r - 2 \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow AB^r \cdot DC = AD^r \cdot DC + DB^r \cdot DC - 2 \cdot AD \cdot DB \cdot DC \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

حال در مثلث ADC نیز داریم:

$$AC^r = AD^r + DC^r - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow AC^r \cdot DB = AD^r \cdot DB + DC^r \cdot DB - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot DB \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \quad (2)$$

روابط (1) و (2) را باهم جمع می‌کنیم:

$$AB^r \cdot DC + AC^r \cdot DB =$$

$$AD^r \cdot DC + DB^r \cdot DC - 2 \cdot AD \cdot DB \cdot DC \cdot \cos \alpha + AD^r \cdot DB + DC^r \cdot DB + 2 \cdot AD \cdot DC \cdot DB \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow AB^r \cdot DC + AC^r \cdot DB = AD^r \left(\frac{DC + DB}{BC} \right) + DB \cdot DC \left(\frac{DB + DC}{BC} \right)$$

$$\Rightarrow AB^r \cdot DC + AC^r \cdot DB = AD^r \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

اگر $AB = c$ و $AC = b$ ، $DC = DB = \frac{a}{2}$ باشد آنگاه با استفاده از قضیه

استوارت داریم:

$$c^r \times \frac{a}{2} + b^r \times \frac{a}{2} = AD^r \times a + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times a$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}(c^r + b^r) = \frac{a}{2}(2AD^r + \frac{a^r}{4})$$

$$\Rightarrow c^r + b^r = 2AD^r + \frac{a^r}{4}$$

۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه‌ی استوارت حل کنید.

$$AB = AC = BC = \lambda \quad , \quad AD = \gamma \quad , \quad BD = x \quad , \quad DC = \lambda - x$$

$$AB^r \cdot DC + AC^r \cdot DB = AD^r \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$\Rightarrow \lambda^r \times (\lambda - x) + \lambda^r \times x = \gamma^r \times \lambda + x \times (\lambda - x) \times \lambda$$

تلاشی در مسیر موفقیت

$$\Rightarrow 6x^4 \times \lambda - 6x^4 x + 6x^4 x = 49 \times \lambda + 6x^4 x - \lambda x^4$$

$$\stackrel{\wedge}{\Rightarrow} 6x^4 = 49 + \lambda x - \lambda x^4 \Rightarrow x^4 - \lambda x - 49 + 6x^4 = 0 \Rightarrow x^4 - \lambda x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 5 \end{cases} \stackrel{DC > DB}{\implies} \begin{cases} x = DB = 3 \\ DC = 5 \end{cases}$$



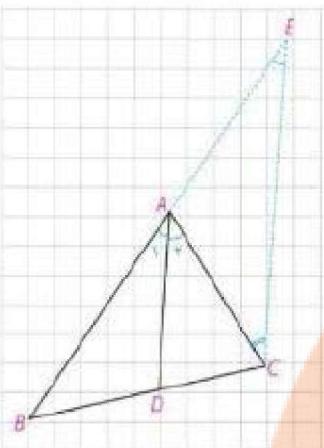
درس سوم : قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

ایات قضیه ۱ صفحه ۷۰

مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

$$\text{الف) چرا } \widehat{A_1} = \widehat{E} \text{ و } \widehat{A_2} = \widehat{C}$$

بنابراین $\widehat{A_1} = \widehat{E}$ و خط $AD \parallel EC$ مورب است بنابراین $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ و همچنین چون $AD \parallel EC$ مورب است پس



ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای E و C می‌توان گرفت؟ مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟

چون AD نیمساز زاویه A است پس $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ درنتیجه بنابراین قسمت الف،

و مثلث AEC متساوی الساقین است (چون $\widehat{E} = \widehat{C}$)

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجه‌ی قسمت

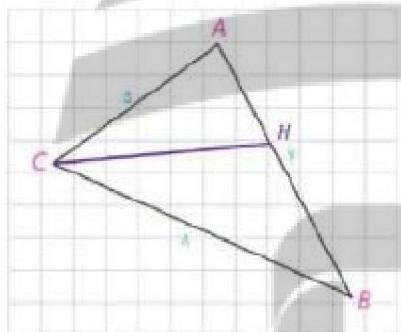
(ب) ایات را کامل کنید :

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

کار در کلاس صفحه ۷۱

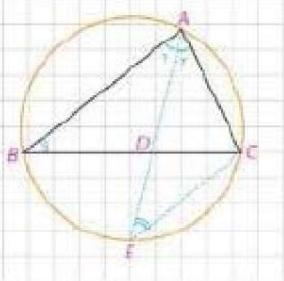
در شکل رویه را نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.

$$\begin{aligned} \frac{AC}{CB} &= \frac{AH}{HB} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{AH + HB}{HB} = \frac{5+8}{8} \\ &\Rightarrow \frac{V}{HB} = \frac{13}{8} \Rightarrow HB = \frac{V \times 8}{13} = \frac{56}{13} \\ &\Rightarrow AH = V - HB = V - \frac{56}{13} = \frac{91 - 56}{13} = \frac{35}{13} \end{aligned}$$



نحوه
تلاشی در مسیر موفقیت

محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث صفحه ۷۱



در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه \hat{A} ، یعنی AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.

الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$

چون هر دو زاویه مجاور و رو به رو به کمان AC هستند بنابراین برابرند.

ب) چرا مثلث‌های $\triangle ABD$ و $\triangle AEC$ متشابه‌اند؟

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & \text{نیمساز } AD \\ \hat{E} = \hat{B} & \text{بنابراین قسمت الف} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{لذا}} \triangle ABD \sim \triangle AEC$$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BD}$$

ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم :

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

و چون $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (چرا؟) بنابراین :

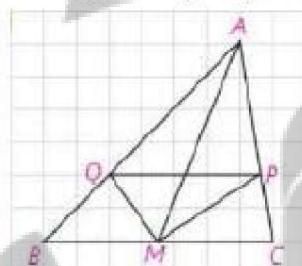
$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

بنابراین قصیه‌ای در فصل اول داریم : چون دو وتر AE و BC یکدیگر را در نقطه D در درون دایره قطع کردند بنابراین

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC \quad \text{داریم :}$$

تمرین صفحه ۷۲

۱- در مثلث ABC وسط M و $PQ \parallel BC$ و MP نیمسازهای زوایای AMB و AMC هستند؛ ثابت کنید :

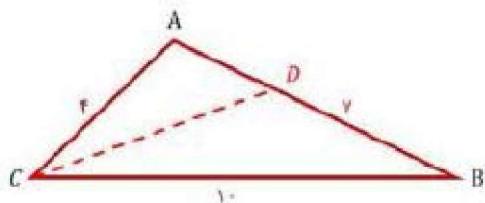


با توجه به قضیه ۱، در مثلث AMB پاره خط MP نیمساز زاویه AMB و در مثلث AMC پاره خط MQ نیمساز زاویه AMC است، بنابراین داریم :

$$\begin{cases} \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \\ \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB} \end{cases} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \xrightarrow{\text{عكس قضیه نالس}} PQ \parallel BC$$

۲- در مثلث ABC و $AB = 7$ و $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز زاویه‌ی داخلی C را به دست آورید.

تلاشی در مسیر موفقیت



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{AD + DB}{DB} = \frac{4 + 1}{1} \Rightarrow \frac{5}{DB} = \frac{5}{1} \Rightarrow DB = \frac{5}{5} = 5$$

$$\Rightarrow AD = 4 - DB = 4 - 5 = -1$$

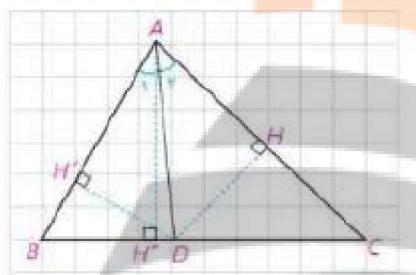
$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$$

$$\Rightarrow CD^2 = 4 \times 6 - 1 \times 5 = 24 - 5 = 19 \Rightarrow CD = \sqrt{19}.$$

۳- با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویه \hat{A} است، روش دیگری برای اثبات قضیه‌ی نیمسازهای زوابای داخلی ارائه کنید:

الف) $DH = DH'$

چون AD نیمساز زاویه A است و از آنجا که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است بنابراین $DH = DH'$.



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} DH' \times AB}{\frac{1}{2} DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AH''}{\frac{1}{2} CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه ارتفاعها و مساحت مثلث)

سؤال صفحه ۷۳

با مسئله زیر در کتاب هندسه ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۵، ۱۴، ۱۲، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های AHB و AHC اندازه های x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث رانیز محاسبه کنید :

به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می کنیم :

$$\begin{cases} CH^2 + AH^2 = AC^2 \\ BH^2 + AH^2 = AB^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 225 \\ (14 - x)^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

طوفین این دو تساوی را از هم کم می کنیم که با حذف y^2 معادله ای بر حسب x بدست می آید :

$$\begin{aligned} x^2 - (14 - x)^2 &= 56 \Rightarrow x^2 - 196 + x^2 + 28x = 56 \\ \Rightarrow x &= 9 \quad \text{و} \quad y = 12 \quad \text{و} \quad S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = 12 \end{aligned}$$

مثال صفحه ۷۳

مساحت مثلث با اضلاع به طول های ۱۴، ۱۳ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با :

$$P = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$s = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 2^2 \times 2^4} = 84$$

و طول های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با :

$$h_a = \frac{2s}{a} = \frac{2 \times 84}{14} = 12 \quad \text{و} \quad h_b = \frac{2s}{b} = \frac{2 \times 84}{15} = \frac{56}{5} \quad \text{و} \quad h_c = \frac{2s}{c} = \frac{2 \times 84}{13} = \frac{168}{13}$$

کار در کلاس صفحه ۷۴

چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه گیری، و اندازه های آنها در شکل مشخص شده است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید :

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می آورید؟

$$BD^2 = 60^2 + 80^2 = 3600 + 6400 = 10000 \Rightarrow BD = 100$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می آورید؟

$$S_{ABD} = \frac{AD \times AB}{2} = \frac{10 \times 60}{2} = 300$$

تلاشی در مسیر موفقیت

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{100 + 90 + 50}{2} = 120$$

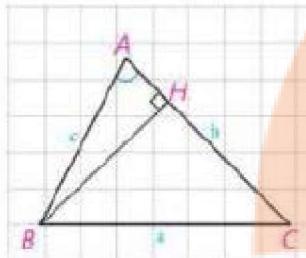
$$S_{CBD} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{120(120-100)(120-90)(120-50)} \\ = \sqrt{120 \times 20 \times 30 \times 70} = \sqrt{840000} \approx 2244/944$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$$S = 2400 + 2244/944 \approx 2644/944$$

فعالیت صفحه ۷۴

همی خواهیم دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به دست آوریم.
۱- در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسماً کرده‌ایم.



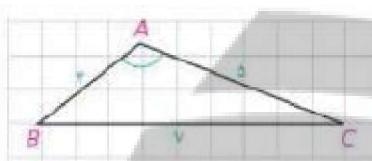
$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \times \sin A$$

۲- مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} bc \sin A$$

کار دو کلاس صفحه ۷۵

۱- مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۴ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.



$$P = \frac{4 + 5 + 3}{2} = \frac{12}{2}$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{12}{2} \left(\frac{12}{2} - 4\right) \left(\frac{12}{2} - 5\right) \left(\frac{12}{2} - 3\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{12}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{675}{16}} = \frac{15}{4} \sqrt{3}$$

۲- مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ بنویسید.

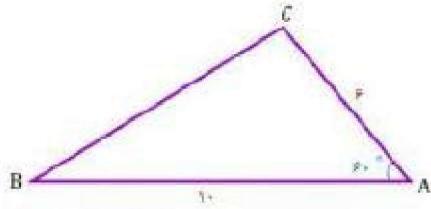
$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin A = \frac{15}{2} \sin A$$

۳- از مقایسه نتایج ۱ و ۲ اندازه‌ی زاویه منفرجه \hat{A} را به دست آورید.

$$\frac{15}{4} \sqrt{3} = \frac{15}{2} \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

تلashی در مسیر موفقیت

۱- در مثلث ABC داریم $\hat{A} = 60^\circ$ و $AC = 6$ ، $AB = 10$. طول BC را به دست آورید.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$BC^2 = (10)^2 + (6)^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \frac{1}{2} = 100 + 36 - 60 = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

روش اول:

$$S = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

روش دوم: با استفاده از دستور هرون نیز می‌توان مساحت را به دست آورد.

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{10} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{19}}$$

کوچکتر کنیم

$$\sin B = \frac{3\sqrt{57}}{28}$$

۲- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟

ابتدا با استفاده از دستور هرون مساحت مثلث‌های ACB و ABD را به دست می‌آوریم.

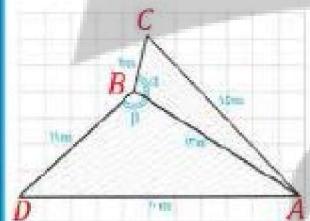
$$P_{ACB} = \frac{15 + 13 + 4}{2} = 16 \Rightarrow S_{ACB} = \sqrt{16 \times 1 \times 3 \times 12} = 24 m^2$$

$$P_{ABD} = \frac{13 + 11 + 2}{2} = 22 \Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{22 \times 9 \times 11 \times 2} = 66 m^2$$

$$S_{ACBD} = S_{ACB} + S_{ABD} = 24 + 66 = 90 m^2$$

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. ($\alpha = \beta$)

روش اول: با استفاده از مساحت‌های دو مثلث ACB و ABD داریم:



تلاشی در مسیر موفقیت

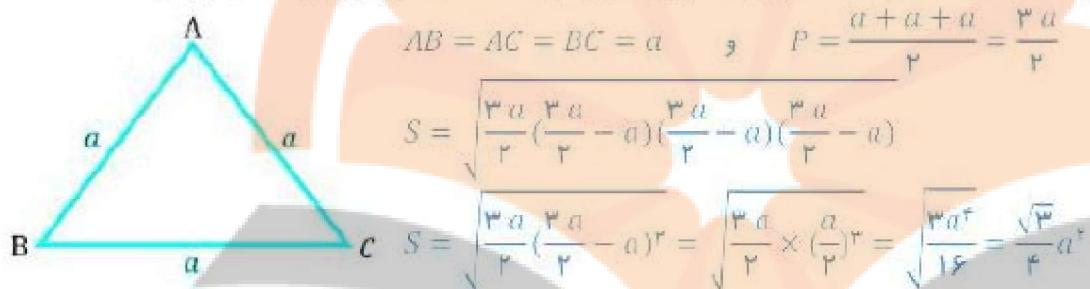
$$\begin{cases} S_{ACB} = \frac{1}{2} BC \times AB \times \sin \alpha \\ S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \times BD \times \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24 = \frac{1}{2} \times 4 \times 13 \times \sin \alpha \\ 66 = \frac{1}{2} \times 13 \times 11 \times \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{12}{13} \\ \sin \beta = \frac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

روش دوم: با استفاده از قضیه کسینوس‌ها نیز می‌توان نشان داد یعنی:

$$\begin{cases} (15)^2 = (4)^2 + (13)^2 - 2 \times 4 \times 13 \times \cos \alpha \\ (20)^2 = (13)^2 + (11)^2 - 2 \times 13 \times 11 \times \cos \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 225 = 185 - 16 \cos \alpha \\ 400 = 290 - 286 \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos \beta = -\frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

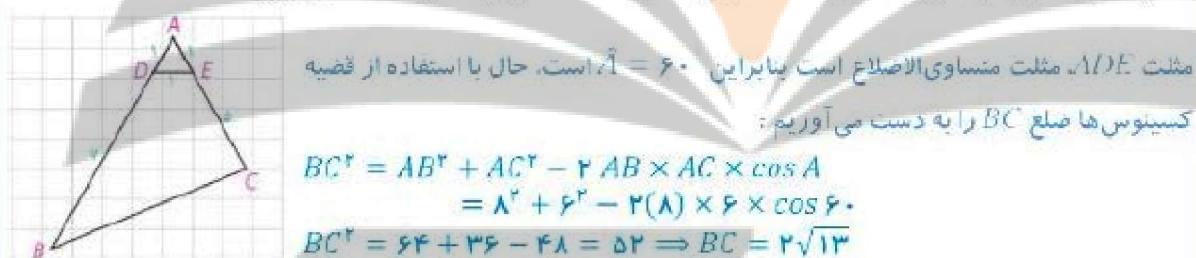


$$AB = AC = BC = a \quad \text{و} \quad P = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right)}$$

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a \right)^3} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{a}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

۴- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.



مثلث ADE ، مثلث متساوی‌الاضلاع است پایا براین $\angle A = 60^\circ$ است. حال با استفاده از قضیه کسینوس‌ها ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \times AC \times \cos A$$

$$= 8^2 + 6^2 - 2(8) \times 6 \times \cos 60^\circ$$

$$BC^2 = 64 + 36 - 48 = 52 \Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

حال مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم و بعد با کم کردن مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ADE مساحت چهارضلعی $DECB$ به دست می‌آید:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \stackrel{a=1}{=} S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{DECB} = S_{ABC} - S_{ADE} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4}\sqrt{3}$$

۵- در شکل زیر $\triangle ABC$ نیمساز زاویه $\angle A$ است. با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه به دست آورید.

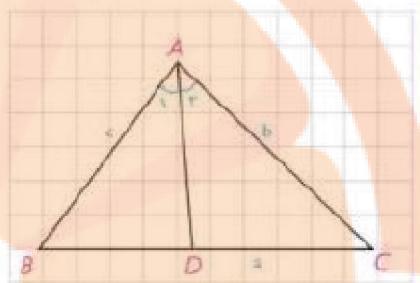
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} (AB) \times (AD) \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} (AC) \times (AD) \times \sin \frac{A}{2}$$

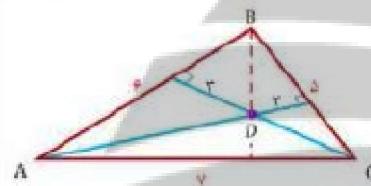
$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (AB + AC)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2 AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = d_a \Rightarrow (A \text{ نیمساز داشت}) d_a = \frac{2 b c \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$



۶- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶ و ۳ به فاصله ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگتر چه فاصله‌ای دارد؟



نقطه تقاطع خطوط داخل مثلث D را ABC می‌نامیم که همان نقطه مورد نظر است.

$$S_{ABC} = S_{BDA} + S_{BDC} + S_{ADC} \quad (1)$$

$$P_{ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9 \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

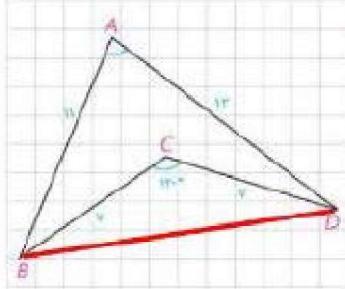
$$S_{BDA} = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9 \quad , \quad S_{BDC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5 \quad , \quad S_{ADC} = \frac{1}{2} \times 7 \times x = \frac{7}{2}x$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} 6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2}x \Rightarrow 6\sqrt{6} - 14 = \frac{7}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) = 4/2 \Rightarrow x = 4/2$$

۷- در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی $ABCD$ را بباید.

تلاشی در مسیر موفقیت

ابتدا نقطه B را به نقطه D وصل می‌کیم. می‌بینیم که مثلث BCD متساوی‌الساقین است. با توجه به زوایای داخلی مثلث و زاویه $\widehat{BCD} = \widehat{CDB} = 3^\circ$ پس $\widehat{BDC} = 120^\circ$ است. حال با استفاده از قسمتی کسینوس‌ها طول ضلع BD را به دست می‌آوریم. بنابراین :



$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \times BC \times CD \times \cos 120^\circ$$

$$BD^2 = 13^2 + 12^2 - 2 \times 13 \times 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 147 \Rightarrow BD = \sqrt{147}$$

حال با استفاده از دستور هرون و نتیجه صفحه ۷۶ داریم :

$$P_{ABD} = \frac{11 + 13 + \sqrt{147}}{2} = 12 + \frac{\sqrt{147}}{2} \Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{\sqrt{147}}{2})(12 + \frac{\sqrt{147}}{2} - 13)(12 + \frac{\sqrt{147}}{2} - 11)(12 + \frac{\sqrt{147}}{2} - 11)}$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{\sqrt{147}}{2})(12 - \frac{\sqrt{147}}{2})(\frac{\sqrt{147}}{2} - 1)(\frac{\sqrt{147}}{2} + 1)}$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{\left(144 - \frac{147}{4}\right)\left(\frac{147}{4} - 1\right)} = \sqrt{\frac{429}{4} \times \frac{143}{4}} = \sqrt{\frac{61347}{16}} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{143\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

از طرفی داریم:

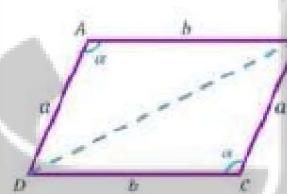
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin A = \frac{1}{2} \times 11 \times 12 \times \sin A = \frac{143}{2} \sin A \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{143\sqrt{3}}{4} = \frac{143}{2} \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \times 13 \times 12 \times \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{143\sqrt{3}}{4} - \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{94\sqrt{3}}{4}$$

۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.



اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD، را به D وصل کنیم، با توجه به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع داریم :

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \times \frac{1}{2} \times ab \cdot \sin \alpha \Rightarrow S_{ABCD} = ab \cdot \sin \alpha$$

تلاشی در مسیر موفقیت

۹- به کمک قضیه کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC

الف) $\hat{A} > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$ اگر و تنها اگر $\hat{A} < 90^\circ$

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \cos A < 0 \xrightarrow{bc} bc \cos A < 0 \Leftrightarrow -2bc \cos A > 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A > b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

$$\xleftarrow{-(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

ب) $a^2 < b^2 + c^2$ اگر و تنها اگر $\hat{A} < 90^\circ$

$$\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos A > 0 \xrightarrow{bc} bc \cos A > 0 \Leftrightarrow -2bc \cos A < 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\xleftarrow{-(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$a^2 = b^2 + c^2$ اگر و تنها اگر $\hat{A} = 90^\circ$

$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \cos A = \cos 90^\circ = 0 \xrightarrow{bc} bc \cos A = 0 \Leftrightarrow -2bc \cos A = 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$\xleftarrow{-(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده (تند)، قاتمه با منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید:

الف) $BC = 9, AC = 6, AB = 10$

$$a = 9, b = 6, c = 10$$

$$a^2 = 100, b^2 + c^2 = 116 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

$BC = 9, AC = 4, AB = 6$ (ب)

$$a = 9, b = 4, c = 6$$

$$a^2 = 100, b^2 + c^2 = 52 \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

$BC = 10, AC = 15, AB = 8$ (ب)

$$a = 10, b = 15, c = 8$$

$$a^2 = 289, b^2 + c^2 = 289 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

تلاشی در مسیر موفقیت

تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس 
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه 
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی 
- دانلود نمونه سوالات امتحانی 
- مشاوره کنکور 
- فیلم های انگیزشی 

 Www.ToranjBook.Net

 [@ToranjBook_Net](https://ToranjBook_Net)

 [@ToranjBook_Net](https://ToranjBook_Net)