

تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

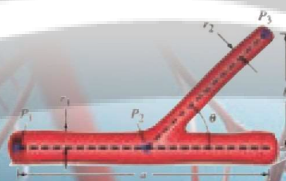
 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)

مثلثات

۲

- ۱ تناوب و تنازات
- ۲ معادلات مثلثاتی

فصل

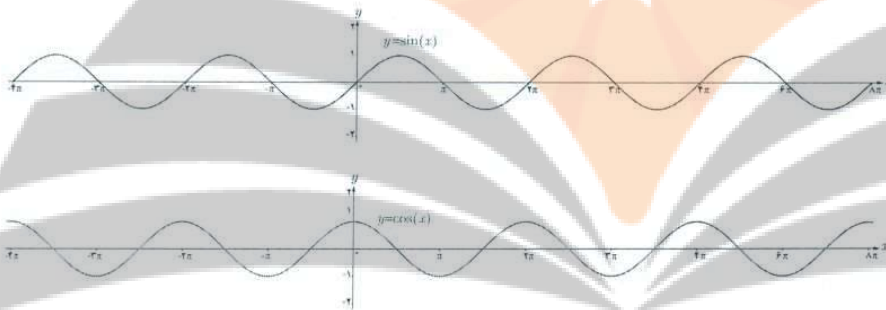


انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

تناوب و تنازات

درس

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$ (=) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف:

تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x \pm T) = f(x)$ و $x \pm T \in D_f$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

فعالیت

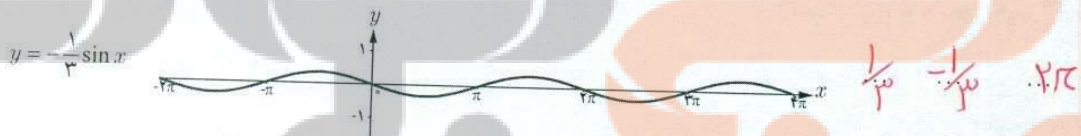
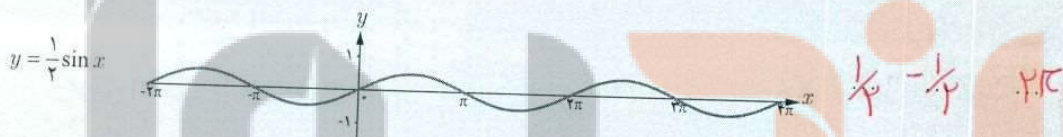
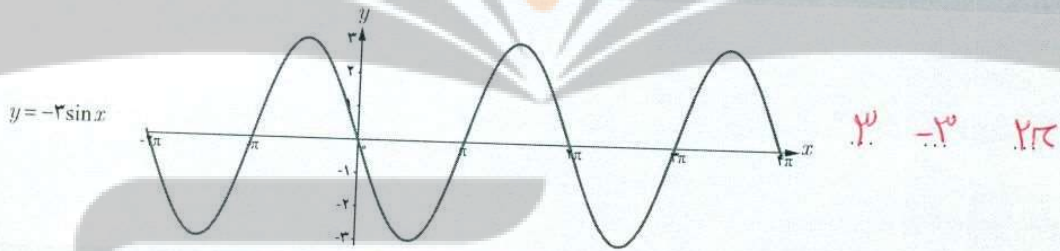
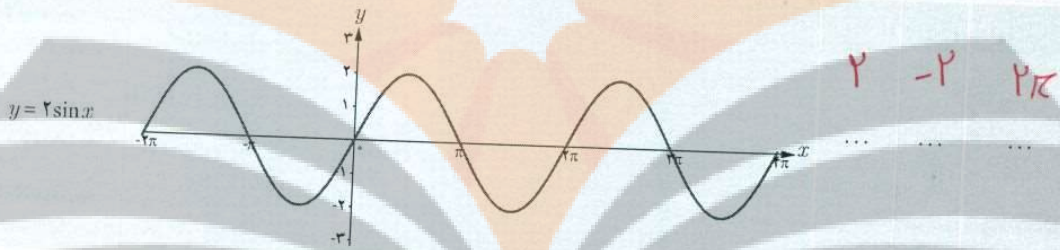
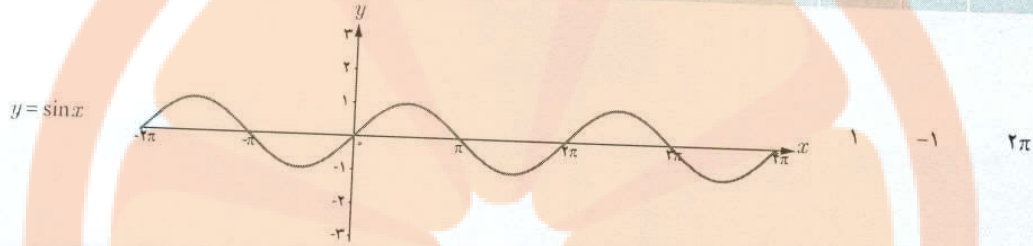
1 می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب 1 و -1 است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۳۵

تابع	نمودار تابع	دوره تناوب	مینیم	ماکزیم
------	-------------	------------	-------	--------



۱ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید.

دوره تناوب 2π و ماکزیم a و مینیم $-a$

۲ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم توابع $y = a \cos x$ و

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-a \leq a \sin x \leq a$$

$$-a + c \leq a \sin x + c \leq a + c$$

$$-a + c \leq y \leq a + c$$

↓
MIN

↓
MAX

$y = a \cos x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-a \leq a \cos x \leq a$$

$$-a + c \leq a \cos x + c \leq a + c$$

$$-a + c \leq y \leq a + c$$

↓
MIN

↓
MAX

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = \sin 2x$		۱	-۱	π
$y = \sin(-3x)$		۱	-۱	$\frac{2\pi}{3}$
$y = \sin \frac{x}{4}$		۱	-۱	4π
$y = \sin(-\frac{x}{4})$		۱	-۱	4π

تلاشی در مسیر موفقیت

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

مثلات ۲۷

۱ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

۲ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است.

$$-1 \leq \sin bx \leq 1$$

$$-1 + c \leq \sin bx + c \leq 1 + c$$

با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = a \cos x + c$ و $y = a \sin x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضرب a در دوره تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضرب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دوره تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب

$$\frac{2\pi}{|b|}$$

است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.

❖ مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

❖ حل:

الف) $\max = |3| - 2 = 1$

$\min = -|3| - 2 = -5$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ب) $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$

$\min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4}$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$

$\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$

$T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ت) $\max = |8| = 8$

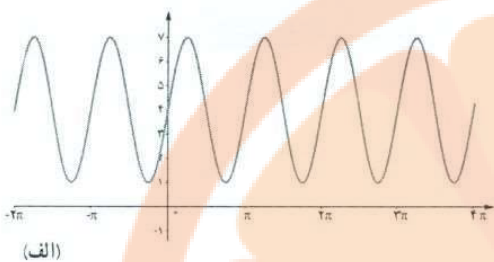
$\min = -|8| = -8$

$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

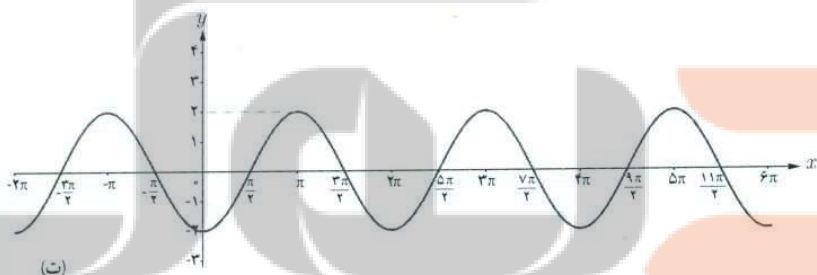
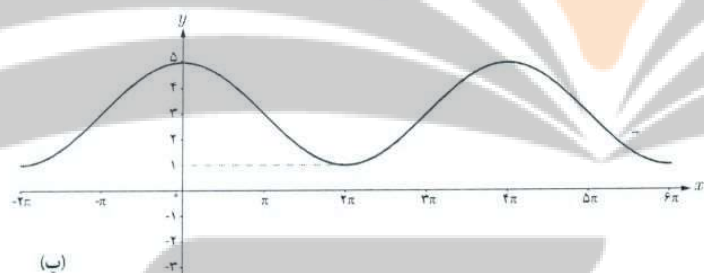
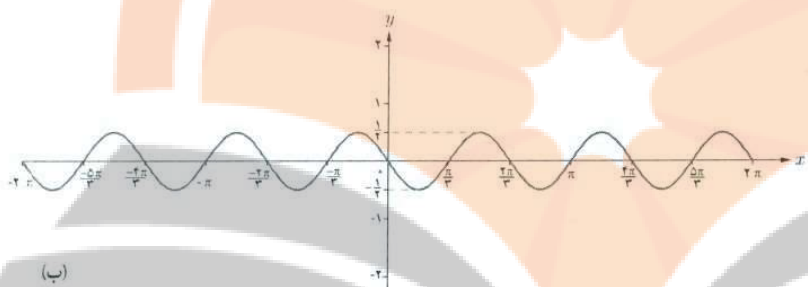
تلاشی در مسیر موفقیت

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۸



❁ مثال: هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ یا $f(x) = a \sin bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



❁ حل:

(الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$. از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

تلاشی در مسیر موفقیت

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

م: مثلثات ۲۹

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است.

$$y = -\frac{1}{3} \sin 3x$$

بنابراین داریم:

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ که در آن علامت a مثبت و علامت b منفی است. لذا $a = 2$ و $b = -\frac{1}{4}$ و بنابراین داریم $y = 2 \cos(-\frac{x}{4}) + 3$.

ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم:

$$y = -2 \cos x$$

تابع تانژانت

فعالیت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

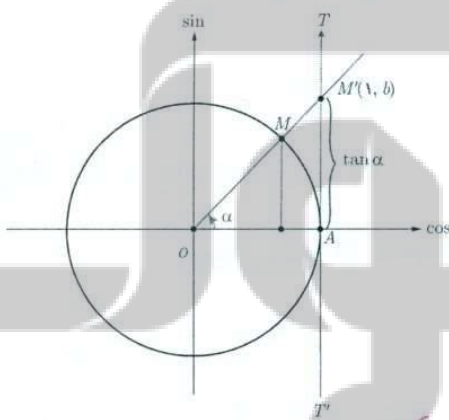
الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

پ) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.



چون تانژانت زوایای ربع اول و سوم هستند مثبت بالای محور تانژانت با سمت مثبت محور تانژانت را قطع می‌کند و تانژانت زوایای ربع دوم و چهارم را قطع می‌کند و تانژانت زوایای ربع دوم و چهارم را قطع می‌کند

چون برای $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ خط OM موازی محور تانژانت‌ها می‌شود و آن را قطع می‌کند که مقدار آن یک عدد حقیقی از محور حقیقی را به عنوان تانژانت آن زاویه در نظر گرفت

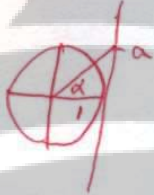
تغییرات تانژانت

فعالیت

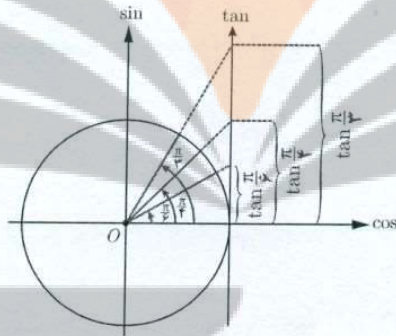
با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می کنیم. اگر $\alpha = 0^\circ$ مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{4}$ ، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می یابد؟ *بی نهایت (توضیح در رسما، اعداد صحیح یا در ساختار اعداد صحیح بی نهایت تعریف نشده است)*

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می توان زاویه ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.
۲ اندازه α روی محور تانژانت ها جدا می کنیم و مرکز ۰ وصل می کنیم



$\tan \alpha = \frac{a}{1} = a$



کار در کلاس

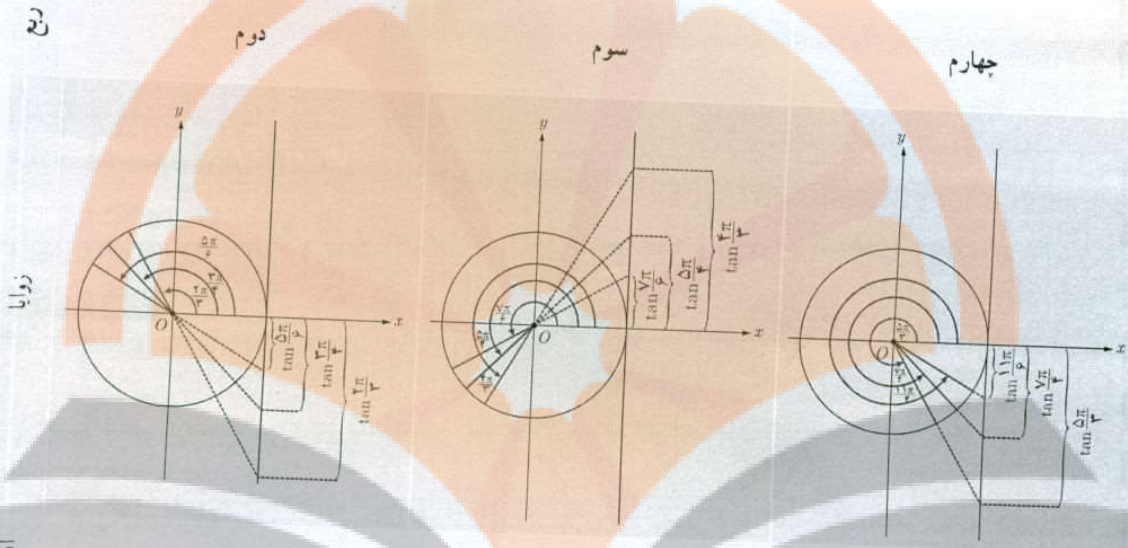
الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

*۰ تا +∞ افزایشی
 +∞ تا -∞ افزایشی
 -∞ تا ۰ افزایشی*

ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

*در ربع اول تغییرات تانژانت از ۰ تا +∞ افزایشی
 در ربع دوم تغییرات تانژانت از -∞ تا ۰ افزایشی
 در ربع سوم تغییرات تانژانت از ۰ تا +∞ افزایشی
 در ربع چهارم تغییرات تانژانت از -∞ تا ۰ افزایشی*

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان
مشقات ۳۱



افزایشی یا کاهش

افزایشی

افزایشی

افزایشی

بازه تغییرات

$(-\infty, \infty)$

$(-\infty, \infty)$

$(-\infty, \infty)$

ب) جدول زیر را کامل کنید. (علامت \uparrow به معنی افزایش یافتن و علامت \downarrow به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول			ربع دوم				ربع سوم			ربع چهارم					
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\uparrow \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\uparrow 1$	$\uparrow \sqrt{3}$	$\uparrow +\infty$	$\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\downarrow -1$	$\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\downarrow -\infty$	$\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\downarrow -1$	$\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\downarrow -\infty$	$\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\downarrow -1$	$\downarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\downarrow 0$

تلاشی در مسیر موفقیت

تابع تانزانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$ ، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

کاردرکلاس

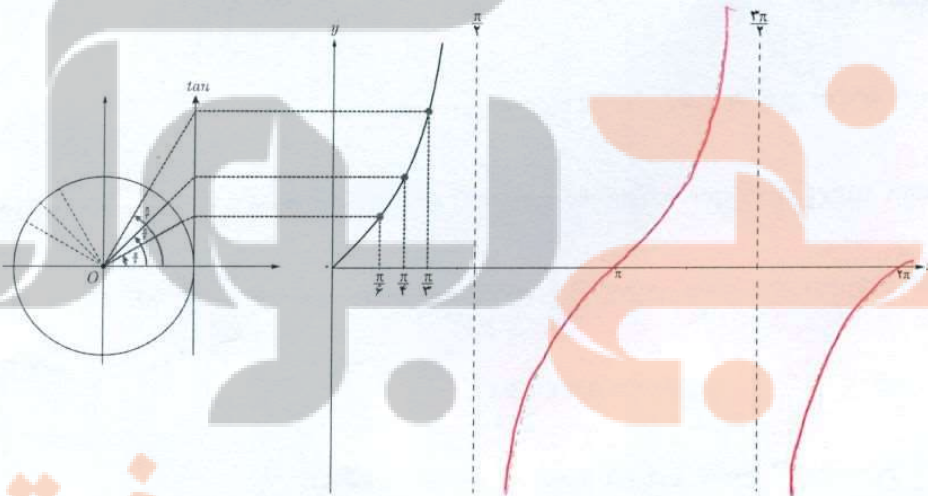
صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.

فاز بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی
 فاز بازه $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ صعودی
 فاز بازه $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ صعودی
 فاز بازه $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ صعودی

رسم تابع $y = \tan \alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱- به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل \tan مد نظر نیست.

تلاشی در مسیر موفقیت

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان ۳۳

تمرین

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin 7x$

$T = \frac{2\pi}{7}$

مکزییم: ۳

مینیم: -۱

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

$T = 4$

مکزییم: $\sqrt{3} + 1$

مینیم: $\sqrt{3} - 1$

ب) $y = -\pi \sin \frac{1}{4}(x-2)$

$T = 4\pi$

مکزییم: π

مینیم: $-\pi$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

$T = \frac{2\pi}{3}$

مکزییم: $\frac{3}{4}$

مینیم: $-\frac{3}{4}$

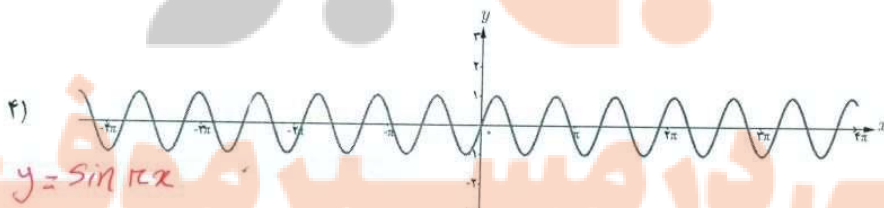
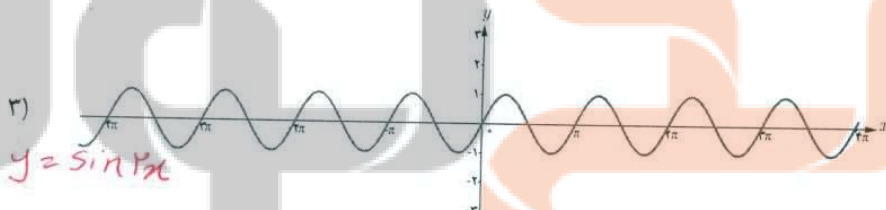
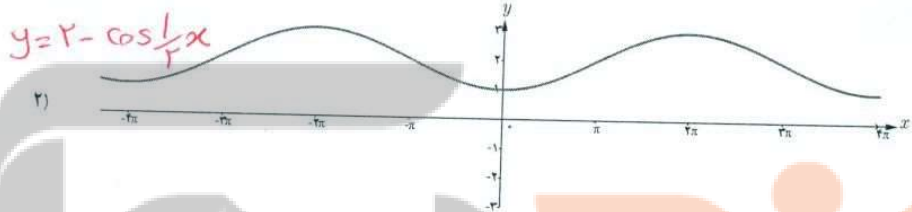
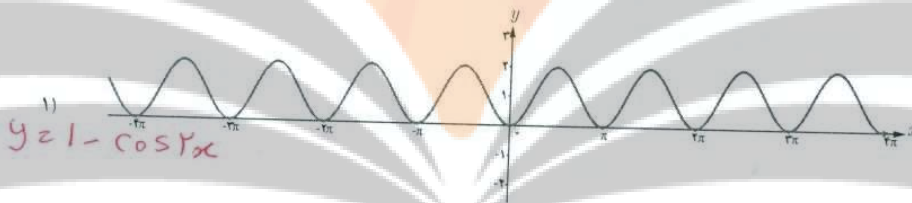
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ت) $y = 1 - \cos 2x$

ب) $y = \sin 2x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{4} x$

الف) $y = \sin \pi x$



نزدیک به وقت
تلاشی دارم سیر فوقت

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۴

۳ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 2$, $\max = 9$, $\min = 3$

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1$

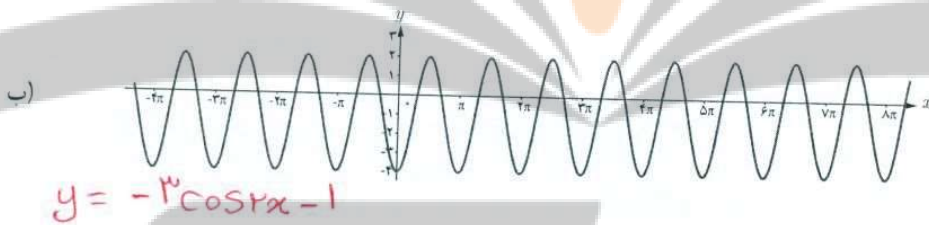
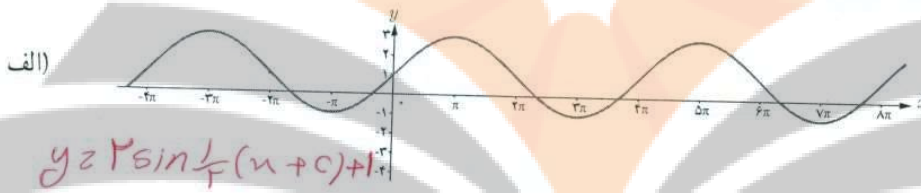
$y = 3 \sin 2x$

$y = -4 \sin \frac{\pi}{2} x + 10$

$y = -3 \sin \frac{1}{4} x - 4$

$y = \cos 2x$

۴ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است. **نادرست**

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. **نادرست**

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیر صعودی باشد. **درست**

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **درست**

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$

	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin \alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	$+\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

در ربع چهارم نیز $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ هر دو صعودی هستند

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

در ربع اول $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ هر دو صعودی هستند

۲

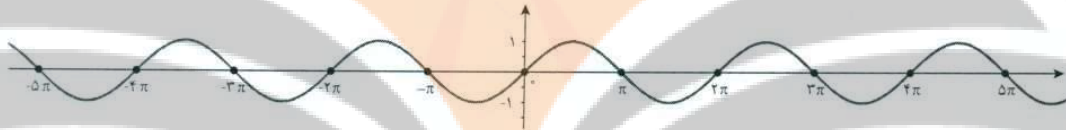
درس

معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

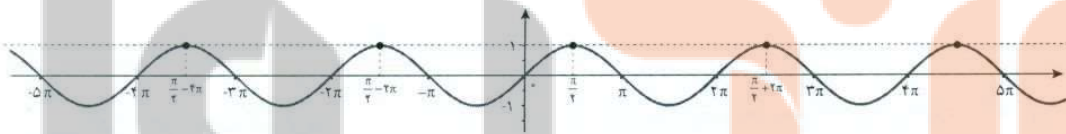
معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $\dots, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد. به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقداری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y = \sin x$ و $y = 1$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots$$

می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

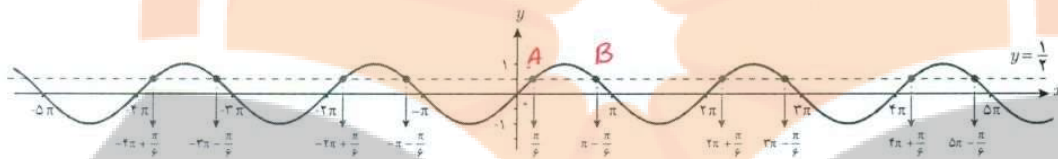
اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

تلاشی در مسیر موفقیت

فعالیت

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید. $\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

۲ خط $y = \frac{1}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ **بله**



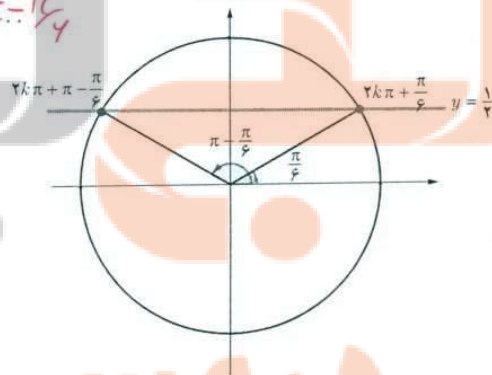
نقاطی با اینغی با هم اشتراک از این آن ما کس داده برقرار می‌باشد

۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{4}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$
 $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$
 $\sin(-\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{4}$

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $2k\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{6}$: $2k\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \dots$



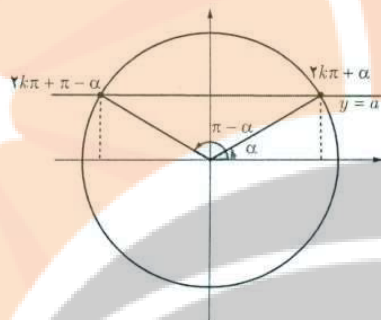
تلاشی در مسیر موفقیت

فصل دوم: مثلثات ۳۷

برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کارد در کلاس

$$2\sin \alpha - \sqrt{3} = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \alpha = \sin 60^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2\sin \alpha + \sqrt{3} = 0$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

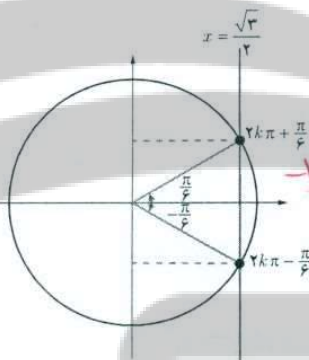
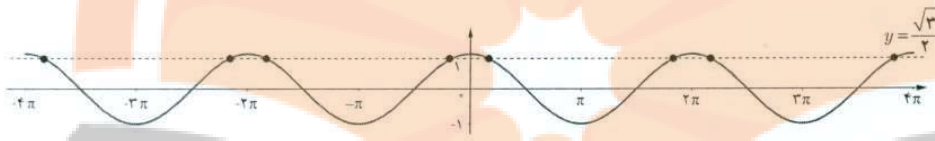
$$\sin \alpha = \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

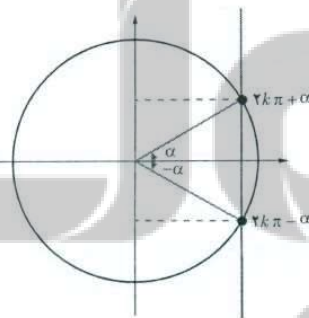
ب) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



الف) برخی از جواب های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید. $-\frac{13\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب های معادله فوق را به دست آورید. $\frac{11\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$
 برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه ای α وجود دارد که $\cos \alpha = a$



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

دهوه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۳۹

❖ مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{3}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

❖ مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

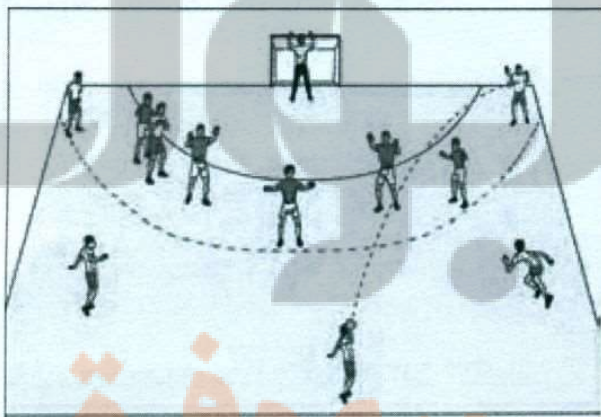
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

❖ مثال: معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



❖ مثال: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم‌تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

تلاشی در مسیر موفقیت

از رابطه داده شده به دست می‌آید:

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{1^{\circ}} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 1^{\circ}}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می‌باشد.

مثال: جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $t = \cos x$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل

دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله

$\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می‌آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

مثال: معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ حل کنید.

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)^2 \quad \text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}$$

$$\sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x \quad \text{استفاده از رابطه } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۴۱

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 0 \text{ یا } \cos x - 1 = 0$$

اکنون جواب‌های معادله‌های به دست آمده را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ می‌یابیم:

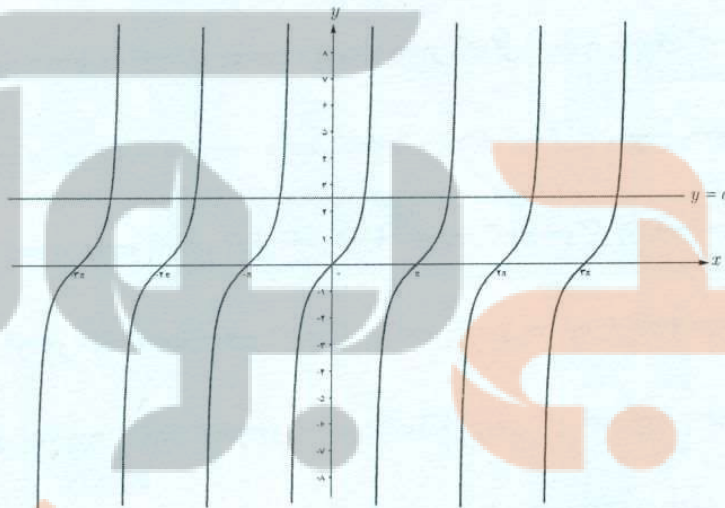
$$2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

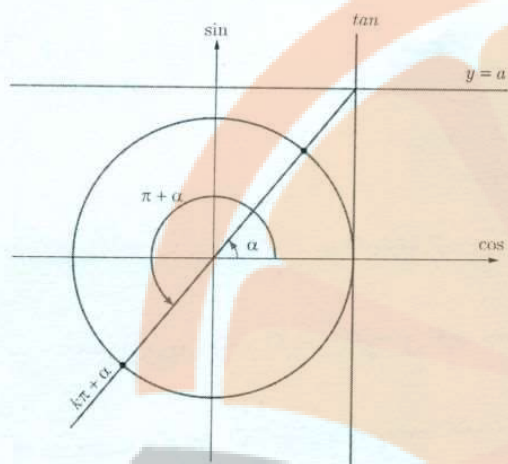
از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را

تحقیق کنیم (حرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x = \frac{3\pi}{2}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیر قابل قبول است اما $x = 0, \frac{\pi}{2}$ مقادیر به دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند. *پس از توان رساندن ممکن است جواب‌های ما که در جواب نهایی ما قرار می‌گیرد فرعی آماده شده باشد که باید بررسی آن‌ها هم می‌شود.*

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan x$ و خط $y = a$ که a یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x = a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a ، که $\tan x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan \alpha = a$. بنابراین معادله $\tan x = a$ به صورت $\tan x = \tan \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x = \tan \alpha$ باید رابطه بین زوایای x و α را بیابیم.



تلاشی در مسیر موفقیت



از دایره مثلثاتی و محور تنازات در شکل مقابل می توان دریافت که رابطه بین زوایای x و a به صورت $x = k\pi + \alpha$ که k یک عدد صحیح، است می باشد.

در نمودار بالا اگر $a = 1$ باشد، داریم:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = k\pi + \alpha$ می باشد که k یک عددی صحیح است.

مثال: معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

$$x = k\pi + 5x \Rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

حل:

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس می توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تنازات به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به صورت زیر به دست می آید.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

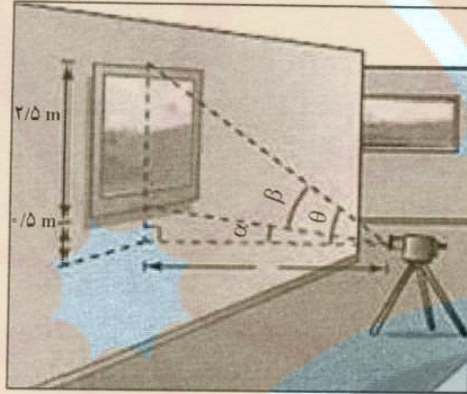
تلاشی در مسیر موفقیت

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۴۳

مثال: نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به صورت زیر است.

$$\tan \beta = \frac{2/5 x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.
 حل: با توجه به شکل برای مثلث قائم الزاویه پایین شکل داریم:

$$\tan \alpha = \frac{2/5}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم:

$$\tan \theta = \frac{3}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به دست می آید:

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{2/5}{x}}{1 + \frac{3}{x} \times \frac{2/5}{x}} = \frac{\frac{3 - 2/5}{x}}{\frac{x^2 + 3}{x^2}} = \frac{2/5 x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم:

$$x = 1 \rightarrow \tan \beta = \frac{2/5 \times 1}{1^2 + \frac{3}{2}} = \frac{2/5}{2/5} = 1$$

از طرفی می دانیم که $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ پس جواب های معادله $\tan \beta = 1$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$\beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=0$ که مقدار $\beta = \frac{\pi}{4}$ را به دست می دهد قابل قبول می باشد.

تلاشی در مسیر موفقیت

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169} \\ \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169} \end{cases}$$

۴۴

تمرین

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 2x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

ب) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

ث) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

ج) $\tan(2x - 1) = 0$

ح) $\tan 2x = \tan \pi x$

خریدار

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$\frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \alpha = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ kez} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \text{ kez} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ و } \alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ دو حالت می‌توان ساخت}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

وه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$

$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (2\cos x - 1) = 0$ $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$

ج) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \rightarrow -2\sin^2 x + 1 - \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

د) $\cos x = \cos 2x$

$x = 2k\pi \pm 2x$

$\begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

ه) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$ $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

و) $\sin x - \cos 2x = 0 \rightarrow \sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0 \rightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

\downarrow
 $-2\sin^2 x + 1$

$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

ز) $\tan(x-1) = 0$

$x-1 = k\pi$

$x = \frac{k\pi + 1}{1}$

ح) $\tan^2 x = \tan \pi x$

$2x = k\pi + \pi x$

$(2-x)x = k\pi$

$x = \frac{k\pi}{2-x}$

تلاشی در مسیر موفقیت



- دانلود گام به گام تمام دروس ✓
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه ✓
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی ✓
- دانلود نمونه سوالات امتحانی ✓
- مشاوره کنکور ✓
- فیلم های انگیزشی ✓

 www.ToranjBook.Net

 [ToranjBook_Net](https://t.me/ToranjBook_Net)

 [ToranjBook_Net](https://www.instagram.com/ToranjBook_Net)